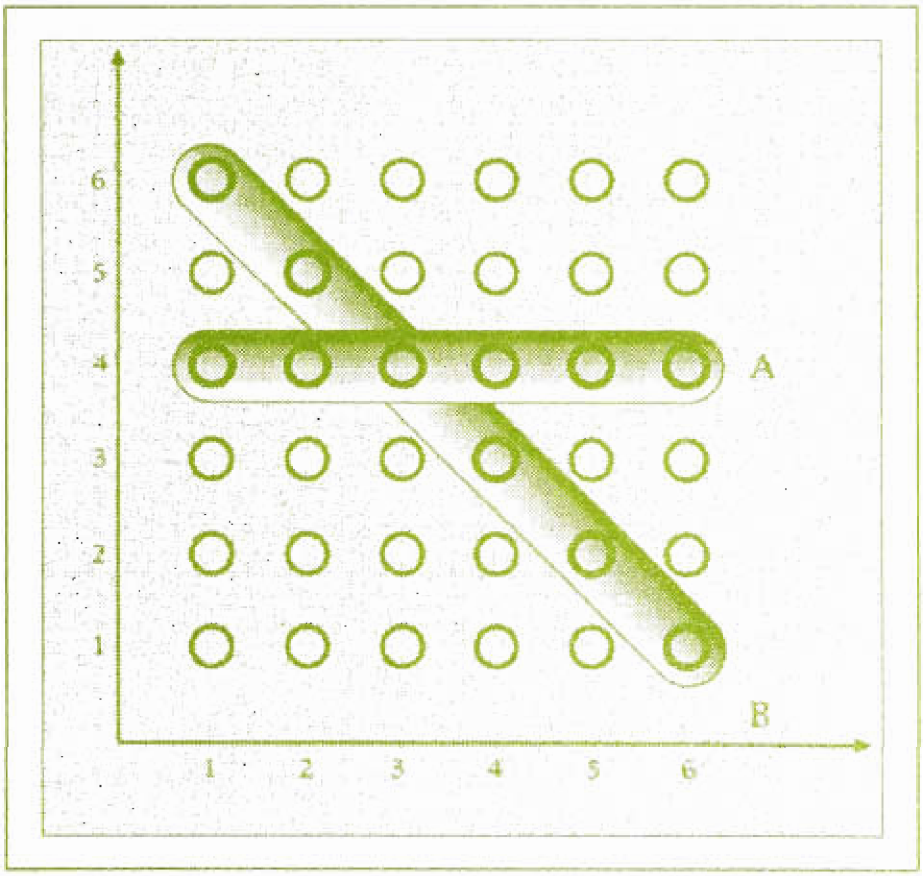
866

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Jorge Rivera Benítez



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

PROBABILIDAD CONDICIONAL

LA EDICIÓN ESTUVO
A CARGO DE:
David Lizcano Cabrera
Jorge Rivera Benítez

CONTROL ESTADÍSTICO DE LA CALIDAD
PARA MICARE S. A.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Jorge Rivera Benítez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería Departamento de Sistemas

ISBN: 970-654-474-7

Diseño de Portada.
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
Deleg. Azcapotzalco, C.P. 02200
México, D.F.

Sección de producción
y distribnción editoriales
tel. 5318-9222/9223. Fax 5318-9222

1a. edición, 1998
2a. edición, 1999
1a. reimpresión, 2001

Impreso en México.

PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

I. PROBABILIDAD CONDICIONAL.

II. INDEPENDENCIA DE DOS EVENTOS, DE TRES EVENTOS, ETC.

III. SUBEXPERIMENTOS INDEPENDIENTES

PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

5.I. PROBABILIDAD CONDICIONAL

5.1. Una urna contiene 10 bolas blancas, 5 amarillas y 10 negras. Una bola se saca al azar y se nota que no es negra. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de color amarillo?

SOLUCIÓN

Como el experimento sólo consiste en sacar una bola, un posible resultado es cualquiera de las 25 bolas que hay en la urna. Si imaginamos que las bolas están enumeradas del 1 al 25, el resultado ω del experimento será el número que tiene marcado la bola extraida y así el espacio muestra resulta

$$\Omega = \{\omega\colon \omega \in \{1,2,3,\ldots,25\}\}$$

También podemos elucubrar que las 10 bolas blancas están marcadas del 1 al 10, las 5 amarillas del 11 al 15 y las 10 negras del 16 al 25, entonces

$$\Omega = \{\omega\colon \omega \in \{\underbrace{1,2,\ldots,10}_{\text{blancas}},\underbrace{11,\ldots 15}_{\text{amarillas}},\underbrace{16,\ldots,25}_{\text{negras}}\}\}$$

Cuando se nos informa que la bola no fue negra, el espacio original Ω se reduce al espacio Ω_*

$$\Omega_* = \{\omega\colon \omega \in \{\underbrace{1,2,\ldots,10}_{\text{blancas}},\underbrace{11,\ldots 15}_{\text{amarillas}}\}\}$$

y es en este nuevo espacio muestra donde debemos medir la probabilidad del evento de interés, el evento de que la bola sea amarilla. Si indicamos por A el evento de que la bola sea amarilla, entonces su probabilidad en este nuevo espacio Ω_* es

$$P_*(A) = \frac{|A|}{|\Omega_*|} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

o sea, el número de caminos en que puede ocurrir A entre el número total de caminos en que pudo haber ocurrido el nuevo espacio muestra. Pero ¡cuidado! Cuando hablamos del tamaño de A, $|A|$, estamos implícitamente diciendo que estamos midiéndolo o contabilizando sus elementos en un contexto de referencia, o sea, con respecto a un conjunto o evento particular, pues su medida puede variar si se mide en un contexto o en otro. ¿Qué tal si preguntamos por su tamaño con repecto al conjunto de sacar 3 águilas? Su medida sería $|A| = 0$, pues en este contexto no tiene nada que hacer el evento A, lo que podría interpretarse como: la intersección de A con el conjunto de sacar 3 águilas es el vacío y el vacío tiene medida cero (no tiene elementos). Por tanto, en la fórmula $P_*(A) = \frac{|A|}{|\Omega_*|}$ debemos entender que el tamaño de A es en el contexto del espacio reducido Ω_* y si queremos ser formales, en lugar de sólo escribir $|A|$ podríamos agregar algún subíndice que señale el contexto en que se está midiendo, por ejemplo

$$|A| = |A|_{\Omega_*} = |A|_*$$

Sin embargo, aunque ahora está explícito el contexto, la notación es complicada. Reflexionando un poco, vemos que dar el tamaño de A en el contexto del espacio Ω_* es equivalente a dar el tamaño de la intersección de A con Ω_*

$$|A|_{\Omega_*} = |A \cap \Omega_*| = |A\Omega_*|$$

y así salvamos dos obstáculos: la ambigüedad del contexto donde se mide el evento A y lo complicado de la notación

$|A|_{\Omega_*}$. Por lo tanto, la probabilidad condicional de A dado que sabemos que el espacio Ω se redujo a Ω_* queda completamente bien definida como

$$P_*(A)=\frac{|A\Omega_*|}{|\Omega_*|}$$

En este ejemplo como $A=\{11, 12,\dots,15\} \subset \Omega_* = \{1,2,\dots,15\}$ resulta que $A\Omega_*= A$ (esto no siempre sucede) y por lo tanto,

$$P_*(A)=\frac{|A\Omega_*|}{|\Omega_*|}=\frac{|A_*|}{|\Omega_*|}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

o equivalentemente como

$$P_*(A)=\frac{\dfrac{|A\Omega_*|}{|\Omega|}}{\dfrac{|\Omega_*|}{|\Omega|}}=\frac{P(A\Omega_*)}{P(\Omega_*)}=\frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}}=1/3$$

donde la medida P es la probabilidad no condicional, o sea, la medida en el espacio muestra original.

Hemos escrito la medida de probabilidad como P_*, con asterisco, para recordar que estamos midiendo en el nuevo espacio muestra Ω_*, pues también podríamos medir la ocurrencia de A en el espacio muestra original Ω. Si así fuera, la medida que sólo indicáramos por $P(A)$, sin asterisco, sería igual a

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=1/5$$

Sin embargo, no es la probabilidad que nos piden, nos preguntan, disimuladamente, la probabilidad condicional de A dado que se conoce que la bola extraída no fue negra, o sea, dado que ya ocurrió el evento Ω_* .

El procedimiento anterior, de evaluar la probabilidad condicional, llevó el propósito de recalcar que estamos evaluando la ocurrencia del evento A en un nuevo espacio muestra

Ω_* y el interpretarla de esta manera a veces resulta conveniente. Sin embargo, no es la forma usual de presentarla ni tampoco usamos la notación acostumbrada. Ahora presentaremos la manera usual.

i) En lugar de indicar al evento que se nos informa que ya ocurrió (el nuevo espacio) con la letra griega Ω_* se usa cualquier letra latina mayúscula, por ejemplo B, o sea, se usan las letras reservadas para los eventos de Ω.

ii) En lugar de escribir $P_*(A)$ para indicar la nueva medida probabilista de A se usa $P(A|B)$, por lo que la definición

$$P_*(A) = \frac{P(A\Omega_*)}{P(\Omega_*)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

resulta

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{|AB|}{|B|}$$

5.2. La siguiente tabla da la distribución de empleados en una planta automotríz de acuerdo al sexo y estado civil.

ESTADO CIVIL	S E X O		
	MUJERES	HOMBRES	TOTAL
CASADOS	26	32	58
NO CASADOS	22	20	42
TOTAL	48	52	100

a) Al seleccionar un empleado, resultó que era casado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer? ¿De que sea hombre?

b) Si el empleado elegido es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea casada? y ¿de no casada?

SOLUCIÓN

Indica por Ω, C y M los siguientes grupos

Ω: total de empleados de la fábrica

C: trabajadores casados (hombres y mujeres)

M: mujeres empleadas (casadas y no casadas)

a) La pregunta sobre la probabilidad de que el trabajador casado sea mujer es veladamente una pregunta sobre la probabilidad condicional $P(M|C)$

$$P(M|C) = \frac{P(MC)}{P(C)}$$

Primero investigaremos quiénes son los eventos MC y C para poder dar sus tamaños y por lo tanto, dar sus respectivas medidas de ocurrencia.

El grupo de personas casadas está formado por mujeres casadas y hombres casados

$$C = CM + CM^C$$

y el enunciado del problema nos da el tamaño de cada uno de ellos:

$$|C| = |CM| + |CM^C| = 26 + 32 = 58$$

La probabilidad de C es

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{58}{100} = 0.58$$

El evento de que sea casado y sea mujer tiene probabilidad

$$P(CM) = \frac{|CM|}{|\Omega|} = \frac{26}{100} = 0.26$$

Por lo tanto

$$P(M|C) = \frac{P(MC)}{P(C)} = \frac{0.26}{0.58} = \frac{13}{29}$$

La probabilidad de que sea hombre el trabajador casado que se eligió corresponde a $P(M^C|C)$ que según la definición de condicional es

$$P(M^c|C)=\frac{P(M^cC)}{P(C)}=\frac{|M^cC|}{|C|}=\frac{32}{58}=\frac{16}{29}$$

Sin embargo,esta probabilidad se puede encontrar más fácilmente apartir de la probabilidad anteriormente calculada: $P(M|C)= 13/29$ ¿Cómo? Recuerde que $P(M|C)$es una probabilidad sobre un nuevo espacio muestra $\Omega_* \equiv C$ y sobre este espacio la probabilidad condicional se comporta como cualquier *probabilidad terrenal* P que debe seguir todas las reglas también terrenales (axiomáticas) y en particular la ley

$$P_*(M^c)= 1 - P_*(M)$$

que en notación convencional dice

$$P(M^c|C)= 1 - P(M|C)= 1 - \frac{13}{29} = \frac{16}{29}$$

b) La probabilidad de que la mujer elegida sea casada es

$$P(C|M)=\frac{P(CM)}{P(M)}=\frac{|CM|}{|M|}=\frac{26}{48}=\frac{13}{24}$$

y la de que la mujer no esté casada es $P(C^c|M)$ que fácilmente la encontramos usando la probabilidad calculada anteriormente $P(C|M)= \frac{13}{24}$ pues tanto $P(C^c|M)$ como $P(C|M)$ son probabilidades definidas sobre el mismo espacio muestra $\Omega_{**}= M$ y por lo tanto cumplen las leyes terrenales de cualquier probabilidad:

$$P(C^c|M)= 1 - P(C|M)= 1 - \frac{13}{24} = \frac{11}{24}$$

5.3. Se tiran dos dados. Piensa en que un dado es azul y el otro rojo.

Esta suposición no es necesaria pues podrías tirar el mismo dado dos veces, una vez a las 7 PM y otra vez unos segundos mas tarde. El insistir en diferenciarlos es sólo para tener resultados, parejas, igualmente probables y así poder usar la definición clásica de probabilidad. Si no haces esta suposición, un resultado, por ejemplo sacar un 1 en una tirada y un 4

en otra tirada (sin importar en cuál de los dados ocurrió el 1 y en cuál el 4) tendría mayor probabilidad de ocurrir que el resultado de sacar un 2 en una tirada y 2 en otra tirada y eso no se vale si queremos usar la definición clásica de probabilidad.

Indica por A, B, C y D a los siguientes eventos:

A: que el segundo dado (el rojo) sea igual a 4.
B: que la suma de los dos dados sea 7.
C: que la suma de los dos dados sea 6.
D: que la suma de los dos dados sea 3.

Queremos investigar (comparar) la probabilidad condicional de A contra la probabilidad no condicional de A. Veremos que la respuesta depende de la información que se tenga a la mano, como se pretende motivar con las siguientes preguntas

i) Encuentra la probabilidad condicional $P(A|B)$ y compárala con la probabilidad no condicional de $P(A)$ ¿Se incrementó la probabilidad del evento A al tener mayor información (que el evento B ya ocurrió)? ¿al menos no empeoró? ¿o de plano bajó?

ii) Encuentra la probabilidad condicional $P(A|C)$ y compárala con $P(A)$ ¿Bajó? o ¿al menos se mantuvo igual?

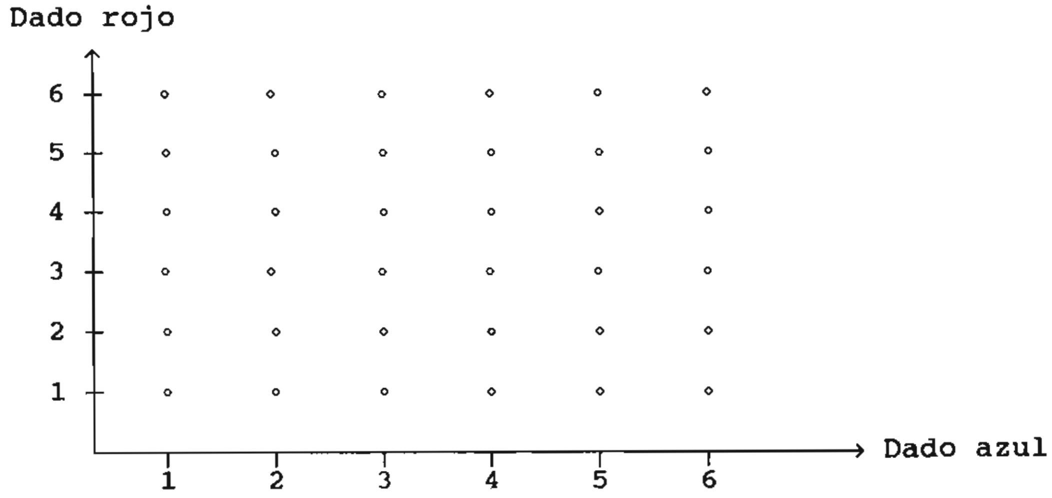
iii) Encuentra la probabilidad condicional $P(A|D)$ y compárala con $P(A)$. ¿Qué pasó?

SOLUCIÓN

El espacio muestra Ω de la tirada de dos dados consiste de todas las parejas $\omega = (\alpha_1, \alpha_2)$ donde α_1 es el número que salió en el dado azul y α_2 es el múmero que salió en el dado rojo, y por supuesto que α_2 puede ser igual a α_1:

$$\Omega = \{ \omega = (\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \{1,2,\ldots,6\} \}$$

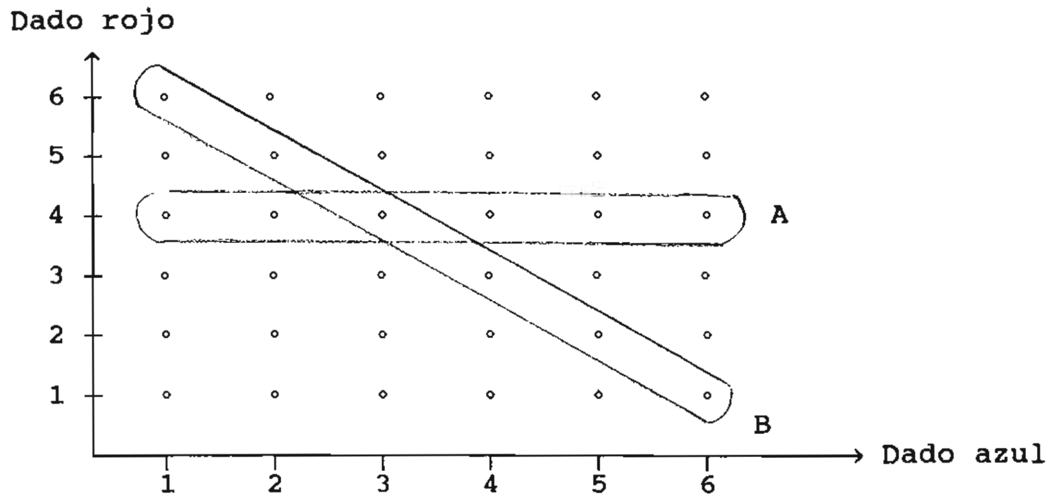
Su tamaño es $|\Omega| = (6)(6) = 36$ y sus puntos se muestran en la siguiente figura



El evento A de que el segundo dado (el rojo) sea 4 se puede indicar por

$$A = \{\omega = (\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in \{1,2,\ldots,6\};\ \alpha_2 = 4\} = \{(1,4),(2,4),(3,4),\ldots,(6,4)\}$$

y se representa en la figura que sigue



Su probabilidad es

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

i) El evento B, que la suma sea 7, es

$B= \{\omega = (\alpha_1, \alpha_2): \alpha_1 + \alpha_2 = 7\} = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),\ldots\}$

y también está representado en la figura anterior. Su probabilidad es

$$P(B)= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

En esta misma figura se observa que el único punto común al evento A y B es (3,4), o sea que

$$AB= A \cap B= \{(3,4)\}$$

por lo tanto

$$P(AB)= \frac{|AB|}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \quad \text{y entonces } P(A|B)= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{6}\ .$$

Comparando esta condicional $P(A|B)= \frac{1}{6}$ con la no condicional $P(A)= \frac{1}{6}$ se nota que no aumenta la probabilidad de ocurrencia del evento A al tener disponible la información de que el evento B ya ocurrió. Sin embargo, si no subió el "chance" de A, tampoco bajó y así decimos que A es independiente de B. Nota que para estos eventos A y B, se tiene la siguiente relación

$$P(A|B)= \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)= \frac{1}{6}$$

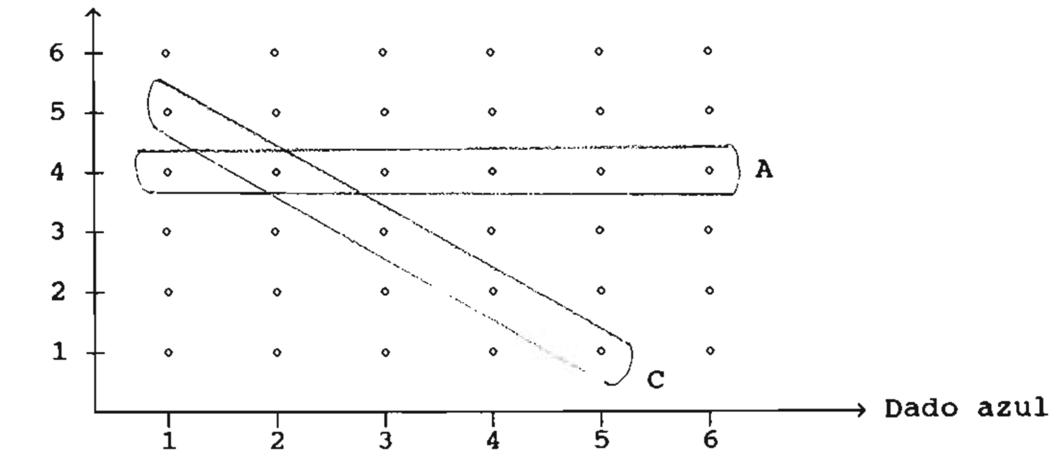
que implica que $P(AB)= P(A)P(B)$ y así mejor usamos esta igualdad para decir que A es independiente de B. Sin embargo, esta relación de independencia es recíproca: B es independiente de A. ¿Por qué? Fácil:

$$P(B|A)= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

ii) Pasamos ahora a ver el efecto sobre A que tiene el conocer que el evento C (la suma fue 6) ha ocurrido. El evento C es

$C = \{\ \omega = (\alpha_1,\ \alpha_2):\ \alpha_1 + \alpha_2 = 6\} = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),\ldots\}$

y se muestra en la siguiente figura, junto con el evento A.



Se observa que C tiene 5 elementos, por lo que $P(C) = \frac{5}{36}$. También es visible que la intersección $AC = \{(2,4)\}$, por lo que

$$P(AC) = \frac{|AC|}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \quad \text{y así} \quad P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

Comparando la probabilidad condicional $P(A|C) = \frac{1}{5}$ con la no condicional $P(A) = \frac{1}{6}$ resulta que

$$\frac{1}{5} = P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} > P(A) = \frac{1}{6}$$

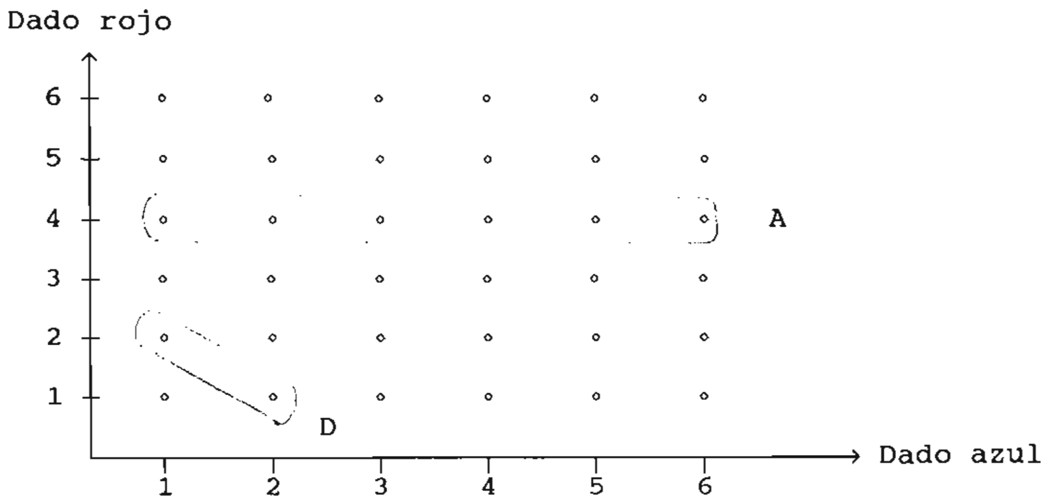
lo que implica para estos dos eventos especiales A y C, que

$$P(AC) > P(A)P(C)$$

y se dice que el evento C es favorable al evento A. Como notarás, la relación "ser favorable" es recíproca, A es favorable a C, pues la relación anterior también implica que

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} > \frac{P(A)P(C)}{P(A)} > P(C)$$

iii) El evento D, que la suma de los dados es 3, es el subconjunto $D= \{(1,2),(2,1)\}$ que se representa junto con A en la siguiente figura:



La probabilidad del evento D es $P(D)= \frac{2}{36}$. La intersección de A con D es el vacío y, por lo tanto, $P(AD)= \emptyset$. Entonces

$$P(A|D)= \frac{P(AD)}{P(D)} = 0$$

Comparándola con la no condicional $P(A)$,

$$0 = P(A|D)= \frac{P(AD)}{P(D)} < P(A)= \frac{1}{6}$$

resulta que el "chance" de A bajó al tener la información de que el evento D ocurrió. Por esta disminución de oportunidades de ocurrencia para A decimos que la ocurrencia A no se vió favorecida por la ocurrencia de D. Como hay reciprocidad en esta relación (ser o no ser favorecido) podemos decir que D también "pierde". Sin embargo, el caso en que $P(A|D)= 0$ revela mucha más que la simple información de que D no es favorable al evento A, pues el hecho de que $D \cap A = \emptyset$ que inocentemente podríamos traducir como el que D y A ocurren independientemente, indica completamente lo contrario: los eventos A y D son fuertemente dependientes. Para descifrar este error de principiante, observa que el conocer que $A \cap D = \emptyset$ significa que $A \subset D^c$ y también que $D \subset A^c$ como lo puedes apreciar en el siguiente esquema

Ω

Por lo tanto, si conocemos que ya ocurrió el evento D, habrá que apostarle al evento contrario a A, o sea, a su complemento:

$$P(A^c|D) = 1 - P(A|D) = 1.$$

El ejemplo ilustra lo que puede ocurrir cuando la información de lo que ha ocurrido cambia:

$P(A|B) = P(A)$ A y B son independientes;

$P(A|C) > P(A)$ C es favorable a A

$P(A|D) < P(A)$ D es desfavorable a A

5.4. Traduzca la siguiente frase en símbolos: "En México, el 5% de los hombres son daltónicos."

SOLUCIÓN

Lo que nos están informando es que la probabilidad de que una persona sea daltónica, dado que es hombre, es 0.05:

$$P(D|H) = 0.05 \qquad (5\%)$$

Aquí debemos interpretar a los eventos D y H como sigue:

D: conjunto de personas daltónicas en México;

H: conjunto de hombres en México; y éstos, como subconjuntos del espacio

Ω: conjunto de personas que viven en México.

Lo que este ejemplo trata de mostrar es que muchas veces la probabilidad condicional de un evento es gratis (no hay que hacer nada para calcularla), no necesitamos usar la definición $P(D|H)= P(DH)/P(H)$.

En otros casos la probabilidad no es propiamente gratis pero es muy fácil de encontrar cuando se tiene mucha información de lo que ha pasado anteriormente, pues el espacio muestra se vuelve cada vez más pequeño y será más fácil encontrar la probabilidad condicional en ese espacio reducido. Esta bondad de las probabilidades condicionales no las habíamos comentado y es la mayor justificación para hablar de ellas. Le sacaremos provecho a esta bondad de poderse conocer fácilmente, a pesar de que nos estén pidiendo una probabilidad que no sea condicional. Como un pequeño avance mostraremos algunas herramientas con que le saquemos provecho a estas probabilidades condicionales. En un principio estas herramientas fueron "pequeños" trucos que resultaban de despejar algún término de la definición de probabilidad condicional, o surgían de aplicar el principio de "divide y vencerás" (expresar un evento como la unión de eventos desunidos), o quizá de combinar ambos trucos. Sin embargo, ten en mente que los pequeños trucos se convierten en herramientas básicas cuando llegan a ser ampliamente conocidas o cuando se revalora su uso para resolver fácilmente problemas complicados o cuando se reinterpretan en aplicaciones concretas. A contiuación te presentamos tres trucos muy útiles, quizá el primero sea el más importante, una regla de oro para que la tengas presente a lo largo de todo el curso.

TRUCO I. (Una regla de oro, la ley de la cadena)
Si te piden la probabilidad no condicional de un evento E, primero ve el experimento como una secuencia de subexperimentos sencillos de manera que el evento E se puede ver como la intersección de eventos particulares A_1 y A_2:

$$E= A_1 \cap A_2= A_1A_2$$

Segundo, interrelaciona las probabilidades de $P(A_1)$ y $P(A_2|A_1)$ de los eventos sencillos A_1 y A_2 para que sea equivalente a la ocurrencia del evento E, usando la siguiente regla

$$\boxed{P(E)= P(A_1A_2)= P(A_1)P(A_2|A_1)}$$

¿Por qué? Sólo piensa en la definición de $P(A_2|A_1)$ y despeja $P(A_1A_2)$.

Dependiendo de los datos disponibles puedes usar la versión

$$\boxed{P(E)= P(A_1A_2)= P(A_2)P(A_2|A_1)}$$

que resulta de considerar la definición de $P(A_2|A_1)$. Estas versiones se pueden generalizar cuando $E= A_1A_2A_3$, etc. como se verá en los ejemplos.

TRUCO II

Si deseas la probabilidad no condicional del evento E, "condiciona sobre algún evento A de un subexperimento que forme parte del experimento de interés", en el siguiente sentido. El evento A que elijas, define una dicotomía en el correspondiente subespacio muestral, usualmente el de la primera etapa, o sea, $\Omega_1= A \cup A^C= A + A^C$. Entonces el evento E puede ocurrir en dos caminos dependiendo si ocurrió A o A^C. En símbolos

$$E= EA \cup EA^C = EA + EA^C$$

Notarás que hemos usado el símbolo + en lugar de $\cup$ para enfatizar que tenemos una unión de eventos desunidos. Por lo tanto

$$P(E)= P(EA) + P(EA^C)$$

$$\boxed{P(E)= P(A)P(E|A) + P(A^C)P(E|A^C)}$$

TRUCO III

Si te piden la probabilidad condicional $P(E|A)$ y tienes como dato la condicional "al revés", o sea, conoces $P(A|E)$, entonces usa la siguiente regla:

$$\boxed{P(E|A)=\frac{P(AE)}{P(A)}=\frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E)+P(E^c)P(A|E)}}$$

¿Por qué? El truco principal está en la siguiente igualdad

$$P(A)P(E|A)=P(AE)=P(E)P(A|E)$$

de donde despejas $P(E|A)$ para después usar el truco I y el II, como se muestra enseguida. Despejando obtenemos

$$P(E|A)=\frac{P(E)P(A|E)}{P(A)}$$

y ahora condicionamos A con respecto a E, $A=AE+AE^c$, siguiendo la idea del truco II, obtenemos $P(A)=P(AE)+P(AE^c)$ y aplicando el truco I en los dos términos de la derecha resulta

$$P(A)=P(E)P(A|E)+P(E^c)P(A|E^c)$$

y sustituyendo $P(A)$ obtenemos la ley del truco III. Otras versiones se presentan en los ejemplos.

Los trucos anteriores los mostraremos con ejemplos más adelante, no te preocupes por tener una visión exacta en este momento, las veremos gradualmente, además de que habrá que dar interpretaciones a usos prácticos.

5.5. Una urna tiene 8 bolas rojas y 4 blancas. Se extraen 2 bolas sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?

SOLUCIÓN

Fíjate que nos piden una probabilidad no condicional, que las dos bolas extraidas sean rojas, veremos qué trucos hacemos para usar probabilidades condicionales. ¿Cuál se te ocurre? Ve que el experimento del ejemplo sacar dos bolas lo puedes visualizar en dos etapas o subexperimentos: en un subexperimento sacas una bola, en el otro subexperimento sacas la otra. Así, el evento de que ambas bolas sean rojas se puede ver como una intersección:

$$\left\{\begin{matrix}\text{ambas bolas}\\ \text{sean rojas}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{una bola extraida}\\ \text{sea roja}\end{matrix}\right\} \cap \left\{\begin{matrix}\text{la otra bola}\\ \text{también sea roja}\end{matrix}\right\}$$

Llama por R_1 al evento de sacar una bola roja en el primer subexperimento (sacar una sola bola) e indica por R_2 al evento de sacar una bola roja en el segundo subexperimento (sacar la segunda bola), entonces el evento

$$\{\text{ambas bolas sean rojas}\} = R_1 \cap R_2 = R_1R_2$$

Así, la pregunta sobre la probabilidad no condicional de sacar dos bolas rojas consiste en encontrar la probabilidad de la intersección R_1R_2 y mostraremos que la podemos relacionar con dos probabilidades fáciles de conocer: $P(R_1)$ y $P(R_2|R_1)$. La relación surge de la definición de probabilidad condicional

$$P(R_2|R_1) = \frac{P(R_1R_2)}{P(R_1)}$$

que nos permite despejar la probabilidad de la intersección:

$$P(R_1R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1)$$

Esta igualdad es llamada la "regla de la cadena" o de la multiplicación. Preferimos llamarla regla de la cadena porque da la idea de que encadenamos (relacionamos) dos subexperimentos "simples" para obtener un experimento "complejo". Los términos del lado derecho de la última igualdad son muy fáciles de encontrar pues son probabilidades definidas en espacios muestrales muy sencillos. La primera probabilidad es

$$P(R_1) = P\left(\begin{matrix}\text{sacar una bola roja en}\\ \text{la primera extracción}\end{matrix}\right) = 8/12$$

La probabilidad condicional $P(R_2|R_1)$ se evalúa fácilmente obvando que si ya sacamos una bola de la urna, entonces, de las

12 que habían sólo restan 11 bolas como candidatos a salir en la segunda extracción. Además, el conocer que la primera bola extraida fue roja permite conocer las oportunidades de que sea roja la segunda bola extraida: ahora hay 7 oportunidades en lugar de 8 que había en la primera extracción. Por lo tanto

$$P(R_2|R_1)= \frac{7}{11}$$

Sustituyendo en la regla de la cadena

$$P(R_2|R_1)= P(R_1)\ P(R_2|R_1)= \frac{8}{12}\ \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$

Si no conociéramos la regla de la cadena, la solución hubiera sido más elaborada. Te mostraremos enseguida para que compares. El experimento de sacar dos bolas ahora lo veremos globalmente, como un solo experimento que se realiza en un instante, no como dos subexperimentos secuenciales que se realizan en dos etapas. Entonces el espacio muestral es el conjunto de todos los arreglos no ordenados de tamaño dos:

$$\Omega = \left\{\omega = \{\omega_1,\omega_2\} \mid \alpha_1,\ \alpha_2 \in \{1,2,3,\ldots,12\};\ \alpha_2 \neq \alpha_1 \right\}$$

Su tamaño es

$$|\Omega|= \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = 66$$

El evento de sacar dos bolas rojas, indiquémoslo por E, es

$$E = \left\{\omega = \{\omega_1,\omega_2\} \mid \alpha_1,\ \alpha_2 \in \{1,2,3,\ldots,8\};\ \alpha_2 \neq \alpha_1 \right\}$$

donde hemos considerado que las bolas rojas están etiquetadas con los números del 1 al 8. Su tamaño es

$$|E|= \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$$

Así, la probabilidad buscada es

$$P(E)= \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$$

que coincide con la encontrada por la regla de la cadena.

Notarás que, en la nueva solución no se involucra el concepto de probabilidad condicional y como ya comentamos, la forma de que aparezca es ver el evento E como la intersección de dos eventos R_1 y R_2 que ocurren aisladamente, uno en una primera etapa y el otro en una segunda etapa, $E = R_1 \cap R_2$, para después usar la regla de la cadena.

5.6. Cuando un tren se aproxima, el operador de la estación oprime un botón con una probabilidad de 0.95 (el otro 0.05 está distraido y se le olvida). Si él aprieta el botón, un circuito funciona con una probabilidad de 0.99. Si el circuito opera, una alarma sonará con probabilidad de 0.9 ¿cuál es la probabilidad de que se oiga la alarma?

SOLUCIÓN

Si indicamos por A el evento de que se oiga la alarma, nos preguntan la probabilidad $P(A)$, la cual no involucra ninguna probabilidad condicional, pero vemos que éstas pueden surgir fácilmente si imaginas que estás en la estación vigilando el proceso que hay que seguir para que finalmente suene la alarma. Piensa que para que ésta suene se debe realizar una secuencia de etapas (subexperimentos) encadenadas o enlazadas, una después de otra: primero, habrá que activar el circuito oprimiendo un botón, después, que el circuito funcione y por último, que la bocina funcione. Por tal razón, el evento de que suene la alarma está determinado por la intersección de tres eventos A_1, A_2 y A_3 que deben ocurrir en cada uno de los tres subexperimentos o etapas secuenciales, o sea que el evento A se puede indicar por $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ donde A_1, A_2 y A_3 se describen enseguida.

SUBEXPERIMENTO 1. (ACTIVACIÓN DEL CIRCUITO)

Aquí el operador oprime un botón o no lo oprime. Si llamamos por A_1 el evento de apretarlo, nos indican que $P(A_1) = 0.95$ y por lo tanto, $P(A_1^C) = 0.05$

SUBEXPERIMENTO 2. (EL CIRCUITO)

El circuito puede operar o no operar, aún si en el subexperimento 1 ocurrió el evento A_1. Indicado por A_2, el evento de que el circuito funcione correctamente y con A_2^C el que no opere, podemos representar simbólicamente el dato de que el circuito opera con una probabilidad de 0.99 cuando se aprieta el botón como sigue:

$$P(A_2|A_1)= 0.99; \qquad P(A_2^C|A_1)= 0.01;$$

También resulta obvio que si no se aprieta el botón, entonces tenemos:

$$P(A_2|A_1^C)= 0.00; \qquad P(A_2^C|A_1^C)= 1.00$$

SUBEXPERIMENTO 3. (LA BOCINA)

Si A_3 indica que la bocina operó correctamente, el dato de que hay una probabilidad de 0.9 de que suene la bocina dado que el circuito operó (y que también se apretó el botón), significa

$$P(A_3|A_1\cap A_2)= 0.9; \qquad P(A_3^C|A_1\cap A_2)= 0.1$$

Con la descripción anterior de A_1, A_2 y A_3 quedará claro que

$$A = A_1\cap A_2\cap A_3$$

y por lo tanto

$$P(A)= P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

Ahora recurrimos a la ley de la cadena para expresar la probabilidad de la intersección

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)= P(A_1)\ P(A_2|A_1)\ P(A_3|\ A_1\cap A_2)$$

que se puede mostrar fácilmente a partir de la definición de probabilidad condicional de A_3 dado A_1 y A_2:

$$P(A_3|\ A_1\cap A_2)= \frac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1\cap A_2)}$$

Despejando la probabilidad de la intersección de los tres eventos resulta

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)\ P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

Recurrimos nuevamente a la ley de la cadena para intersección de dos eventos, o sea $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\ P(A_2 | A_1)$, con lo que resulta

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\ P(A_2 | A_1)\ P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$
$$= 0.95(0.99)(0.9) = 0.84645$$

5.7. Una ánfora tiene n nombres donde a nombres son de mujeres y b son de hombres, n= a + b. Se extraen dos nombres secuencialmente y sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo nombre sea el de una mujer?

SOLUCIÓN

Si indicamos por A el evento de que el segundo nombre es de mujer, queremos encontrar $P(A)$. Para encontrarla notamos que el evento A no impone ninguna condición sobre el primer nombre extraido, sólo pide que el segundo sea mujer, entonces podemos visualizarlo como sigue

$$A = A \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{Primer nombre} \\ \text{sea mujer} \end{array} \right\} + A \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{Primer nombre} \\ \text{no sea mujer} \end{array} \right\}$$

Si indicamos con M_1 el evento de que el primer nombre es de mujer, entonces

$$A = A \cap M_1 + A \cap M_1^C$$

Como los eventos de la derecha son desunidos, entonces

$$P(A) = P(A \cap M_1) + P(A \cap M_1^C)$$

Ahora aplicando la regla de la cadena a cada una de las probabilidades del lado derecho, tenemos

$$P(A) = P(M_1)P(A|M_1) + P(M_1^c)P(A|M_1^c)$$

que es la llamada ley de la probabilidad total.

Las probabilidades en el lado derecho de la igualdad son muy fáciles de calcular

$$P(M_1) = P(\text{Primer nombre es de mujer}) = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{n}$$

$$P(M_1^c) = 1 - P(M_1) = \frac{b}{a+b} = \frac{b}{n}$$

$$P(A|M_1) = \left\{\begin{matrix}\text{2o. nombre extraido sea de mujer} \\ \text{dado que el 1o. fue de mujer}\end{matrix}\right\} = \frac{a-1}{n-1}$$

$$P(A|M_1^c) = \left\{\begin{matrix}\text{2o. nombre extraido sea de mujer} \\ \text{dado que el 1o. fue de hombre}\end{matrix}\right\} = \frac{a}{n-1}$$

y sustituyendo en la ecuación de probabilidad total resulta

$$P(A) = \frac{a}{n}\,\frac{a-1}{n-1} + \frac{b}{n}\,\frac{a}{n-1} = \frac{a}{n}$$

Es interesante notar que cuando no disponemos de información sobre lo ocurrido en la primera extracción, la probabilidad de que sea mujer en la segunda extracción es igual a la probabilidad de que sea mujer en la primera extracción. En otras palabras, la probabilidad de que sea mujer se mantiene constante en la primera extracción, en la segunda, en la tercera (en caso de que la hubiera), etc.; siempre que no se conozca lo que ha sucedido en las extracciones previas. En símbolos

$$\frac{a}{n} = P(M_1) = P(A)$$

pero en caso de tener información de lo sucedido previamente, la probabilidad condicional de que sea mujer cambia de una extracción a otra:

$$P(A|M_1) = \frac{a-1}{n-1} \neq P(M_1) = \frac{a}{n}$$

$$P(A|M_1^c) = \frac{a}{n-1} \neq P(M_1) = \frac{a}{n}$$

El hecho de que las probabilidades cambien de una extracción a otra se debe a que los dos nombres se extraen de la anfora sin reemplazo. En caso de que se eligieran con reemplazo, estas probabilidades se mantienen constantes.

5.8. ESQUEMA DE POLYA . Una urna contiene inicialmente *r* bolas rojas y *b* bolas blancas. En cada prueba se selecciona una bola al azar, se anota su color y se regresa junto con *c* bolas del mismo color. Encuentra la probabilidad de que se obtenga una bola roja en cada una de las primeras tres pruebas.

SOLUCIÓN

El evento de sacar una bola roja en cada una de tres extracciones consecutivas se puede ver como una secuencia de subexperimentos, los cuales se pueden denotar de la siguiente manera:

R_i: Sacar bola roja en la i-ésima extracción.

A: Sacar una bola roja en cada una de las tres primeras extracciones.

Entonces, lo que nos interesa calcular es $P(A) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ que por la regla de la cadena es

$$P(A) = P\left\{\begin{matrix}\text{Sacar bola roja en} \\ \text{la 1a. extracción}\end{matrix}\right\} \cdot P\left\{\begin{matrix}\text{Sacar bola roja en la 2a. ex-} \\ \text{tracción si la 1a. fue roja}\end{matrix}\right\} \cdot$$

$$P\left\{\begin{matrix}\text{Sacar bola roja en la 3a. extracción dado} \\ \text{que la 1a. y 2a. bolas fueron rojas}\end{matrix}\right\}$$

Usando la notación acordada:

$$P(A) = P(R_1)\ P(R_2 | R_1)\ P(R_3 | R_2 R_1)$$

Sólo nos falta calcular cada uno de los términos involucrados en la ecuación anterior. Usando la información que nos dan, estos resultan

$$P(R_1) = \frac{r}{r + b}$$

Después de haber sacado una bola roja en la primera extracción, tendremos r+c bolas rojas y el total de bolas en la urna será de r+c+b, por lo que

$$P(R_2|R_1)=\frac{r+c}{r+b+c}$$

Antes de la tercera extracción y dado que en la segunda extracción, la bola seleccionada fue roja, habrán r+2c bolas rojas en la urna y un total de r+2c+b bolas, por esta razón

$$P(R_3|R_2R_1)=\frac{r+2c}{r+b+2c}$$

Sustituyendo estos tres términos en la ecuación de probabilidad del evento A, resulta

$$P(A)=\frac{r}{r+b}\,\frac{r+c}{r+b+c}\,\frac{r+2c}{r+b+2c}$$

que es la probabilidad que nos piden.

5.9. En cierta ciudad, durante el mes de mayo, la probabilidad de que un día lluvioso sea seguido por otro día lluvioso es 0.80 y la probabilidad de que un día soleado anteceda a un día lluvioso es 0.60. Suponiendo que cada día es clasificado como lluvioso o soleado y que, el tiempo de cada día dependen solamente del tiempo del día anterior calcula la probabilidad de que en la citada ciudad un día lluvioso preceda a dos días lluviosos seguidos, luego siga un día soleado y finalmente otro día lluvioso.

SOLUCIÓN

La pregunta involucra 5 días con las siguientes características: el primero que sea lluvioso, los dos siguientes lluviosos, el cuarto soleado y el quinto lluvioso.

En un día particular, digamos el día n, el tiempo puede ser lluvioso o soleado; si indicamos por L_n el evento de que ese día sea lluvioso entonces L_n^C significa que es soleado. Así, para los 5 días en que estamos interesados, podemos utilizar la notación que aparece en el siguiente esquema:

Día 1. L_1 = el día 1 fue lluvioso; L_1^C = el día 1 fue soledado.

Día 2. L_2 = el día 2 fue lluvioso; L_2^C = el día 2 fue soledado.

$\vdots$

Día 5. L_5 = el día 5 fue lluvioso; L_5^C = el día 5 fue soledado.

Los datos dan las probabilidades condicionales del tiempo para dos días consecutivos cualesquiera. El dato de que la probabilidad de que un día lluvioso sea seguido por otro día lluvioso sea igual 0.8 significa:

$$P(L_2|L_1) = P(L_3|L_2) = P(L_4|L_3) = P(L_5|L_4) = 0.80$$

Sin embargo también está revelando la probabilidad del complemento de un día lluvioso, pero condicional sobre el mismo espacio muestral reducido que corresponde a un día lluvioso, o sea

$$P(L_2^C|L_1) = 1 - P(L_2|L_1) = 0.20$$

y similarmente

$$P(L_3^C|L_2) = P(L_4^C|L_3) = P(L_5^C|L_4) = 0.20$$

El otro dato de que hay una probabilidad de 0.60 para que un día soleado anteceda a un día lluvioso significa en símbolos

$$P(L_2|L_1^C) = P(L_3|L_2^C) = P(L_4|L_3^C) = P(L_5|L_4^C) = 0.60$$

que también implica

$$P(L_2^C|L_1^C) = 1 - P(L_2|L_1^C) = 0.40$$

$$P(L_2^C|L_1^C) = P(L_3^C|L_2^C) = P(L_4^C|L_3^C) = P(L_5^C|L_4^C) = 0.40$$

Ahora, el evento sobre el que nos preguntan parece ser la intersección $L_1L_2L_3L_4^CL_5$. Su probabilidad, por la regla de la cadena o de la multiplicación es

$$P(L_1L_2L_3L_4^CL_5) = P(L_1)\ P(L_2|L_1)\ P(L_3|L_1L_2)\ P(L_4^C|L_1L_2L_3)$$
$$P(L_5|L_1L_2L_3L_4^C)$$

Como el enunciado dice que el estado del tiempo en un día particular sólo depende de las condiciones que tenga el día anterior, pero no de dos días anteriores, ni tres, etc., entonces

$$P(L_5 \mid L_1 L_2 L_3 L_4^C) = P(L_5 \mid L_4^C)$$

$$P(L_4^C \mid L_1 L_2 L_3) = P(L_4^C \mid L_3)$$

$$P(L_3 \mid L_1 L_2) = P(L_3 \mid L_2)$$

Usando esta indicación, resulta que

$$P(L_1 L_2 L_3 L_4^C L_5) = P(L_1)\ P(L_2 \mid L_1)\ P(L_3 \mid L_2)\ P(L_4^C \mid L_3)\ P(L_5 \mid L_4^C)$$

Las probabilidades condicionales de los tiempos de dos días consecutivos son datos (ver el principio de la solución):

$$P(L_1 L_2 L_3 L_4^C L_5) = P(L_1)\ (0.80)(0.80)(0.20)(0.60) = 0.0768\ P(L_1)$$

Sin embargo, no se conoce $P(L_1)$, pues no se sabe si el primer día que se toma como referencia fue lluvioso o soleado. Si nos aseguran que el primer día fue lluvioso, entonces $P(L_1) = 1$ y así resulta que

$$P(L_1 L_2 L_3 L_4^C L_5) = 0.0768$$

Si no sabemos cómo fue el tiempo del primer día, entonces sólo podemos contestar la condicional sobre el tiempo de ese día, o sea $P(L_2 L_3 L_4^C L_5 \mid L_1)$ que por definición es

$$P(L_2 L_3 L_4^C L_5 \mid L_1) = \frac{P(L_1 L_2 L_3 L_4^C L_5)}{P(L_1)}$$

$$P(L_2 L_3 L_4^C L_5 \mid L_1) = \frac{P(L_1)\ P(L_2 \mid L_1)\ P(L_3 \mid L_2)\ P(L_4^C \mid L_3)\ P(L_5 \mid L_4^C)}{P(L_1)}$$

$$= P(L_2 \mid L_1)\ P(L_3 \mid L_2)\ P(L_4^C \mid L_3)\ P(L_5 \mid L_4^C) = 0.0768$$

5.10 (J.Alonso Cruz). Se tienen 3 urnas con el siguiente contenido:

la urna I tiene 4 bolas blancas y 2 negras,

la urna II tiene 2 bolas blancas y 2 negras, la urna III tiene 5 bolas blancas.

Se escoge una urna al azar y se hace una extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea blanca?

SOLUCIÓN

El evento *"la urna I es seleccionada"* lo denotamos por I.
El evento *"la urna II es seleccionada"* lo denotamos por II y lo mismo para la urna III. El evento *la bola extraida es blanca* lo denotamos por B.

Nos piden encontrar P(B) que no es un probabilidad condicional. Sin embargo, usaremos "trucos" en que condicionaremos a nuestra conveniencia. Se ilustrará que los trucos son la ley de probabilidad total y la regla de multiplicación. También se mostrará que no se requiere inspiración para encontrarlos pues el experimento descrito en el enunciado nos va dando la pauta: el resultado final es sacar una bola pero previamente se seleccionó una urna. Así vemos que el experimento puede pensarse que consiste de dos etapas consecutivas. La primera etapa (elegir la urna) y la segunda etapa (extraer la bola).

Primero describimos verbalmente los eventos que siguen.
$I \cap B$ es el evento *la urna seleccionada es la I y la bola extraida es blanca.*

$II \cap B$ es el evento *la urna seleccionada es la II y la bola extraida es blanca.*

$III \cap B$ es el evento *la urna seleccionada es la III y la bola extraida es blanca.*

Para tener una bola blanca, ésta puede ser de la urna I ó II ó la III, esto es, la solución del problema es calcular

$$P(B)= P[(I\cap B) \cup (II\cap B) \cup (III\cap B)]= P(I\cap B) + P(II\cap B) + P(III\cap B)$$

donde la última igualdad resulta al observar que los tres eventos involucrados en la unión son desunidos:

$$(I\cap B)\cap(II\cap B)=\emptyset;\qquad (I\cap B)\cap(III\cap B)=\emptyset;$$

$$(II\cap B)\cap(III\cap B)=\emptyset;\qquad (I\cap B)\cap(II\cap B)\cap(III\cap B)=\emptyset$$

Para calcular $P(I\cap B)$ necesitamos la regla de la multiplicación, así

$$P(I\cap B)=P(I)\ P(B|I)$$

y no la versión $P(I\cap B)=P(B)P(I|B)$, ya que coloquialmente se dice que para que una bola sea blanca de la urna I, primero escojo la urna I luego hago la extracción de una blanca. En los demás casos hacemos lo mismo:

$$P(II\cap B)=P(II)\ P(B|II)$$

$$P(III\cap B)=P(III)\ P(B|III)$$

Como las urnas pueden ser elegidas en igualdad de condiciones, entonces:

$$P(I)=P(II)=P(III)=\frac{1}{3}$$

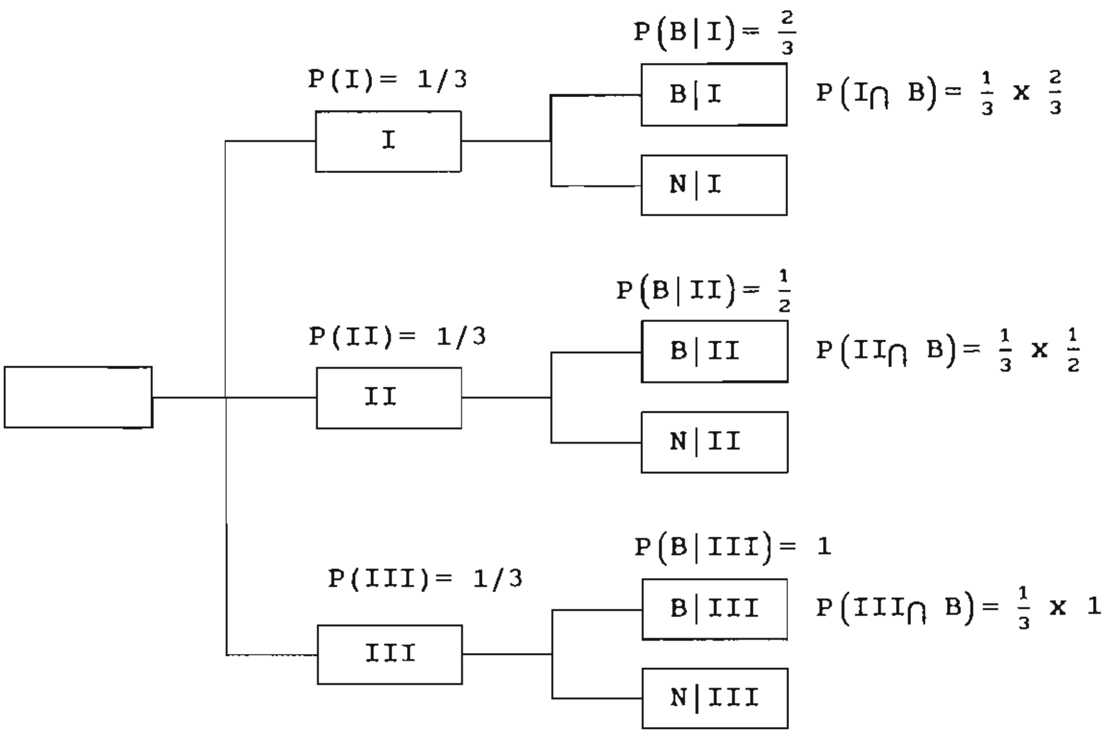
y las probabilidad condicionales son

$$P(B|I)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\ ;\quad P(B|II)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ ;\quad P(B|III)=\frac{5}{5}=1$$

entonces

$$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{13}{18}$$

Una solución gráfica se obtiene usando un diagrama de árbol.



Por lo tanto,

$$P(B) = P(I \cap B) + P(II \cap B) + P(III \cap B) = \frac{13}{18}$$

(J. Alonso Cruz, Departamento de Sistemas, UAM Azc.)

5.11 Tres firmas surtieron transistores PNN a una compañía que fabrica equipo de telemetría. Se supone que todos los transistores se ordenaron con las mismas especificaciones. La compañía inspecciona dos parámetros de calidad en los transistores, declarándolo defectuoso si alguno de los parámetros está fuera de las especificaciones y durante varios años ha encontrado los siguientes resultados:

Firma	Fracción defectuosa	Fracción suministrada por la firma
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

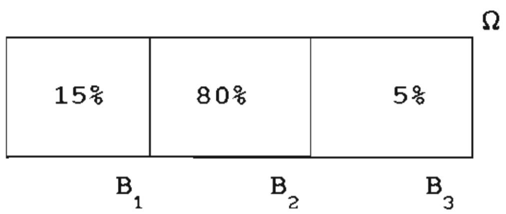
Debido a los altos costos, la compañía ha dejado de realizar las pruebas a cada firma y ahora solo prueba cualquier transistor que elige aleatoriamente de su almacén. La compañía considera razonable suponer que la proporción de defectuosos de cada firma y la proporción que tiene cada firma en el inventario de la compañía se han mantenido iguales a la de los años anteriores. El jefe de producción toma aleatoriamente un transistor, lo lleva al laboratorio de pruebas y se encuentra que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que venga de la firma 3?

SOLUCIÓN

Llamemos D al evento de obtener defectuoso el transistor elegido. Denota por B_1, B_2 y B_3 los eventos que representan las contribuciones de cada firma al inventario de la compañía. Nos preguntan por $P(B_3|D)$.

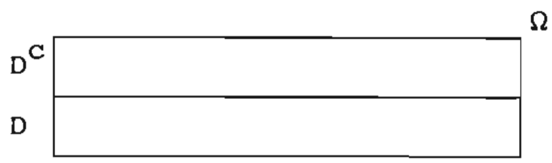
El espacio muestra Ω representa el almacén de la compañía que está compuesto por los transistores que surte cada una de las firmas. Simbólicamente:

$$\Omega = B_1 + B_2 + B_3$$



También el almacén puede verse desde otro punto de vista: la parte de defectuosos y la parte de no defectuosos. Simbólicamente

$$\Omega = D + D^C$$

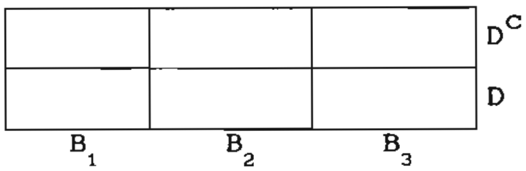


Conjuntando ambas visiones, el almacén puede verse formado por seis partes como se muestra enseguida

$$\Omega = \Omega\ \Omega$$

$$\Omega = (D+D^C)(B_1 + B_2 + B_3)$$

$$\Omega = DB_1 + DB_2 + DB_3 + D^CB_1 + D^CB_2 + D^CB_3$$



El transistor defectuoso puede venir de la firma 1, 2 o la 3. Simbólicamente,

$$D = DB_1 + DB_2 + DB_3$$

con probabilidad

$$P(D) = P(DB_1) + P(DB_2) + P(DB_3) = P(B_1)P(D|B_1) + P(B_2)P(D|B_1) + P(B_3)P(D|B_3)$$

Para encontrar la probabilidad que interesa solo sustituimos en

$$P(B_3|D) = \frac{P(B_3D)}{P(D)}$$

¿Cómo sustituir $P(B_3D)$? Usamos $P(B_3D) = P(B_3|D)P(D)$

ó $P(B_3D) = P(D|B_3)P(B_3)$. Elegimos la fórmula que involucre los datos de que disponemos, o sea, la segunda. Por lo tanto,

$$P(B_3|D) = \frac{P(D|B_3)P(B_3)}{P(B_1)P(D|B_1)+P(B_2)P(D|B_2)+P(B_3)P(D|B_3)}$$

$$P(B_3|D) = \frac{(0.05)(0.03)}{(0.15)(0.02)+(0.8)(0.01)+(0.05)(0.03)} = \frac{3}{25}$$

5.12 Supón que el 5% de los hombres y el 0.25% de las mujeres son daltónicos. Una persona daltónica se elige al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona sea hombre?

Supón que el número de hombres y mujeres es el mismo. Contesta la pregunta si la población tiene el doble de hombres que de mujeres.

SOLUCIÓN

La población Ω se divide en el conjunto H de hombres y el conjunto H^C de mujeres:

$$\Omega = H + H^C$$

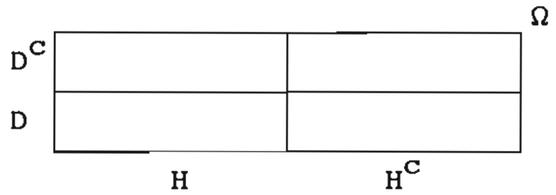
La misma población Ω también se puede particionar en la colección D de daltónicos y la de no daltónicos D^C; o sea

$$\Omega = D + D^C$$

Conjuntando ambas particiones resulta que

$$\Omega = \Omega\ \Omega = \left(H + H^C\right)\ \left(D + D^C\right) = HD + HD^C + H^C D + H^C D^C$$

y podemos representar gráficamente esta división de la población por



Si se elige un individuo daltónico. éste puede ser hombre o mujer, o sea

$$D = D\Omega = D\left(H + H^C\right) = DH + DH^C$$

y su probabilidad es

$$P(D) = P(DH) + P\left(DH^C\right) = P(H)P(D|H) + P\left(H^C\right)P\left(D|H^C\right)$$

(o sea que se está usando la ley de probabilidad total).

Ahora se nos indica que el 5% de los hombres son daltónicos, lo cual significa $P(D|H) = 0.05$. También se conoce que el 0.25% de las mujeres son daltónicas, o sea, $P\left(D|H^C\right) = 0.0025$

En caso de que la población tenga la misma población de hombres y mujeres, se tiene que

$$P(H)= \frac{1}{2} \ ; \qquad P(H^C)= \frac{1}{2}$$

y en esta situación obtenemos

$$P(D)= \frac{1}{2}\ (0.05)\ +\ \frac{1}{2}\ (0.0025)= \frac{0.0525}{2}$$

Se nos pregunta la probabilidad de que la persona daltónica elegida sea hombre, o sea, $P(H|D)$ y la respuesta está en Bayes, que podemos deducirla como sigue:

$$P(H|D)= \frac{P(HD)}{P(D)} = \frac{P(D|H)P(H)}{P(H)P(D|H)\ +\ P(H^C)P(D|H^C)}$$

$$P(H|D)= \frac{(0.05)\,(1/2)}{(0.0525)\,(1/2)} = 0.952$$

Cuando la población Ω tiene 2 veces más hombres que mujeres, esta condición también queda reflejada en las probabilidades, o sea

$$P(H)= 2P(H^C)= 2(1 - P(H))= 2 - 2P(H)$$

que implica

$$P(H)= \frac{2}{3}$$

Este resultado también puede obtenerse considerando una población con m mujeres y por lo tanto con $2m$ hombres, por lo que resulta

$$P(H)= \frac{2m}{m + 2m} = \frac{2}{3}$$

En estas condiciones, la pregunta acerca de $P(H|D)$ queda resuelta como sigue:

$$P(H|D)= \frac{P(HD)}{P(D)} = \frac{(0.05)\,(2/3)}{(0.05)\,(2/3)\ +\ (0.0025)\,(1/3)} = 0.975$$

5.13 Tres cocineros hacen un tipo especial de pastel y se conoce que cuando lo hacen les falla que se esponje con respectivas probabilidades de 0.02, 0.03 y 0.05. En el restaurante donde trabajan, A hace el 50% de estos pasteles, B el 30% y C el 20%. ¿Qué proporción de fallas las causa el cocinero A?

SOLUCION

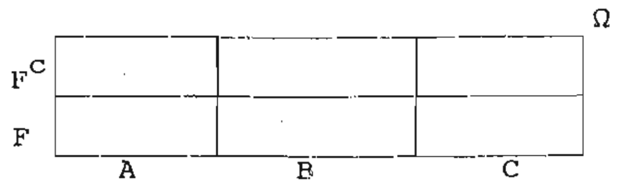
Indica por Ω la colección de todos los pasteles de tipo especial que se hacen el restaurante. Esta colección de pasteles se puede dividir en dos grupos: el grupo F de pasteles que fallaron de esponjarse y el grupo F^C de los que no fallaron, o sea

$$\Omega = F + F^C$$

Por otro lado, también puede dividirse en los tres subconjuntos correspondientes a los cocinados por el cocinero A, a los hechos por el cocinero B y a los elaborados por C. Si A es la colección de pasteles hechos por el cocinero A, B la colección de pasteles hechos por el cocinero B y C los hechos por el cocinero C, entonces

$$\Omega = A + B + C$$

Conjuntando ambas divisiones de Ω, resulta la división representada en el siguiente esquema:



Se nos informa la distribución del trabajo de los tres cocineros para hacer el pastel especial: el cocinero A hace el 50%, B el 30% y C el 20%. Así la probabilidad de que un pastel especial elegido al azar haya sido cocinado por A es:

$$P(A) = 0.50$$

Similarmente, el que ese pastel haya sido cocinado por B ó por C tienen las probabilidades

$$P(B)= 0.30 \quad y \quad P(C)= 0.20$$

respectivamente.

También conocemos las *'habilidades'* (deficiencias) de cada cocinero para hacer ese pastel.

$$P(F|A)= 0.02, \quad P(F|B)= 0.03, \quad P(F|C)= 0.05$$

de donde se nota que A es mejor cocinero (le falla menos) que los demás.

Se nos pide encontrar la probabilidad de que un pastel que no esponjó se puede atribuir al cocinero A, o sea, encontrar $P(A|F)$. Obsérvese que nos preguntan una probabilidad condicional $P(A|F)$ que en cierta forma es el *'reves'* del dato conocido $P(F|A)= 0.02$. La respuesta está en el teorema de Bayes que deduciremos nuevamente:

$$P(A|F)= \frac{P(AF)}{P(F)} = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)}$$

donde el evento F, elegir un pastel que no está esponjado, puede surgir de los pasteles defectuosos elaborados por A, por B ó por C, o sea

$$F= FA + FB + FC$$

y su probabilidad es:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(FA) + P(FB) + P(FC) \\ &= P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) \\ &= 0.02(0.5) + 0.03(0.3) + 0.05(0.2) = 0.029 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(A|F)= \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \frac{0.02(0.5)}{0.029} = \frac{10}{29}$$

5.14 En una clínica psiquiátrica los trabajadores sociales están muy ocupados que sólo el 60% de los clientes potenciales que telefonean pueden hablar inmediatamente con un trabajador social. Al otro 40% se les pide que dejen su número telefónico para contactarlos después. Cerca del 75% de las veces que un trabajador social puede regresar la llamada el mismo día y el otro 25% de las veces el paciente es contactado al siguiente día.

La experiencia de la clínica muestra que la probabilidad de que un paciente visite la clínica es de 0.8 si él pudo hablar inmediatamente con el trabajador social, mientras que esta probabilidad es de 0.6 y 0.4 si el paciente fue contactado, respectivamente, el mismo día o al día siguiente.

i) ¿Qué porcentaje de gente que telefoneó visitará la clínica para buscar consulta?

ii) ¿Qué porcentaje que visitó la clínica fueron atendidos inmediantamente por teléfono?

SOLUCION

La población Ω de pacientes que telefoneó a la clínica puede descomponerse en aquéllos que visitarán la clínica y los que no la visitarán. Si V es la colección de pacientes que visitan la clínica, la división anterior puede escribirse por:

$$\Omega = V + V^C$$

También, la misma población Ω que telefoneó puede dividirse en tres grupos desunidos: los que fueron inmediatamente atendidos en el momento en que llamaron, el grupo de pacientes que fueron contactados el mismo día pero no en el momento en que llamaron y el grupo de pacientes que fueron contactados hasta el siguiente día que llamaron. Llame por A_1, A_2 y A_3 a los tres grupos respectivos, o sea

A_1: individuos contactados inmediatamente con el trabajador social.

A_2: individuos contactados el mismo día pero no en el momento que llamaron.

A_3: individuos contactados al siguiente día que llamaron.

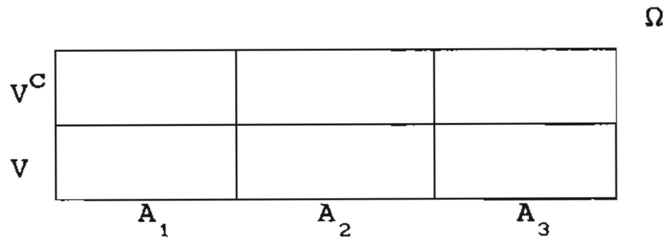
Observa que estos conjuntos son desunidos. La división de los pacientes que llamaron según la atención a sus llamadas queda representada por:

$$\Omega = A_1 + A_2 + A_3$$

Conjuntando ambas divisiones de Ω, esta población queda aún más dividida en

$$\Omega = \Omega\ \Omega = \left(V + V^C\right)\left(A_1 + A_2 + A_3\right) = VA_1 + VA_2 + VA + V^CA_1 + V^CA_2 + V^CA_3$$

Que puede representarse en el siguiente diagrama.



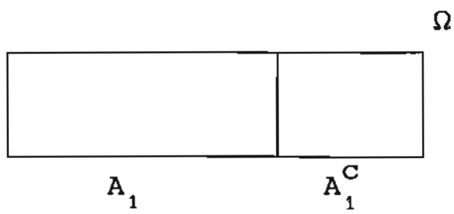
Se nos informa que el 60% son inmediatamente atendidas por el trabajador social, o sea

$$P\left(A_1\right) = 0.60$$

El otro 40% deja su teléfono para contactarlo posteriormente, o sea

$$P\left(A_1^C\right) = 0.40$$

Esta división de Ω está representada por



El grupo A_1^C de pacientes que no fueron atendidos inmediatamente se puede dividir a su vez en aquellos que se contactan el mismo día (grupo A_2) y aquellos que se contactan al día siguiente (grupo A_3), es decir

$$A_1^C = A_2 + A_3$$

También se dice que de este 40% que dejan su teléfono, sólo se contacta, el mismo día, al 75% de ellos, o sea que

$$P(A_2) = 0.40(0.75) = 0.30$$

y el otro 25% se contacta al día siguiente, o sea

$$P(A_3) = 0.40(0.25) = 0.10$$

Los otros datos, según la experiencia de la clínica, son

$$P(V|A_1) = 0.8$$

$$P(V|A_2) = 0.6$$

$$P(V|A_3) = 0.4$$

i) La pregunta sobre el porcentaje de pacientes que telefoneó y visitaron la clínica corresponde a la probabilidad de subconjunto V, el cual puede representarse por

$$V = V\Omega = V(A_1 + A_2 + A_3) = VA_1 + VA_2 + VA_3$$

y su probabilidad es

$$\begin{aligned} P(V) &= P(VA_1) + P(VA_2) + P(VA_3) \\ &= P(V|A_1)P(A_1) + P(V|A_2)P(A_2) + P(V|A_3)P(A_3) \\ &= (0.8)(0.6) + (0.6)(0.3) + (0.4)(0.1) = 0.70 \end{aligned}$$

Por lo tanto, sólo el 70% de la gente que telefoneó visitará la clínica.

ii) Aquí se nos pide $P(A_1|V)$,

$$P(A_1|V) = \frac{P(A_1V)}{P(V)} = \frac{P(V|A_1)P(A_1)}{P(V)} = \frac{(0.8)(0.6)}{0.7} = 0.6857$$

O sea, el 68.57% de los que visitaron la clínica fueron inmediatamente comunicados con un trabajador social.

5.15 PARADOJA DE LOS CAJONES DE BERTRAND

La paradoja que sigue no es la famosa paradoja de la construcción aleatoria de una cuerda en círculo.

Un estuche tiene tres cajones y en cada cajón hay dos monedas. En un cajón, digamos el cajón 1, ambas monedas son de oro; en el cajón 2, ambas monedas son de plata y en el cajón 3, una moneda es de plata y la otra de oro. Se elige un cajón al azar y de éste se saca, también al azar, una moneda. Si esta moneda es de oro, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del cajón que tiene dos monedas de oro?

SOLUCION

Indica con C_i al evento de que se haya elegido el cajón i. Dado que la selección del cajón se hizo al azar, resulta que

$$P(C_1)= P(C_2)= P(C_3)= 1/3$$

Llamado con O al evento de la moneda fue de oro y con L el que la moneda sea de plata, vemos que en símbolos, la pregunta corresponde a encontrar $P(C_1|O)$. Usando el resulta de Bayes tenemos que

$$P(C_1|O)= \frac{P(C_1)\ P(O|C_1)}{P(C_1)\ P(O|C_1)\ +\ P(C_2)\ P(O|C_2)\ +\ P(C_3)\ P(O|C_3)}$$

Los datos también nos indican que

$$P(O|C_1)= 1; \qquad P(O|C_2)= 0; \qquad P(O|C_1)= 1/2$$

por lo tanto

$$P(C_1|O)= \frac{(1/3)(1)}{(1/3)(1)\ +\ (1/3)0\ +\ (1/3)(1/2)} = 2/3$$

lo cual significa que 2/3 de las veces (el 66.66%) que se realice el experimento descrito, la moneda de oro que resulte proviene del cajón 1, el que tiene más monedas de oro y sólo el 33.33% de las veces habrá venido del cajón 3. Esta es la respuesta correcta a la pregunta. Sin embargo, otras personas contestan que las oportunidades de que haya venido de la caja 1 son del 50% porque razonan del siguiente modo:

Después de haber sacado la moneda de oro, sólo hay dos cajones (el primer y el tercer cajón) de los cuales puede provenir y, como los cajones se eligen al azar, entonces el cajón 1 se elige con probabilidad de 1/2, o sea, $P(C_1|O)= 1/2$. ¿Cuál es el error en esta línea de razonamiento? Se está ignorando que el cajón 1 tiene sólo monedas de oro y por lo tanto hay más oportunidades de que la moneda que ya tenemos en las manos, haya provenido del cajón 1, pero este olvido, a la vez se puede deber a interpretar erróneamente el enunciado del problema. Tal parece que en este razonamiento se considera que primero se eligió la moneda y después se eligió el cajón, lo cual es incorrecto. En realidad es cierto que hay dos elecciones completamente aleatorias, pero primero se elige el cajón y después la moneda.

5.16 Demuestra el "*principio de a lo seguro: en las buenas y en las malas (sure-thing principle)*" que dice lo siguiente:
Si

$$P(A|C) \geq P(B|C) \quad \text{y} \quad P(A|C^c) \geq P(B|C^c)$$

entonces $P(A) \geq P(B)$

El problema aparece como un ejercicio en pag. 151 de Chung, K. L., ELEMENTARY PROBABILITY THEORY WITH STOCHASTIC PROCESSES, Springer Verlang. (Traducido por Reverté)

DEMOSTRACION

Observa que $\quad A= A\ \Omega = A(C + C^c)= AC + AC^c$

También $\quad B= B\ \Omega = B(C + C^c)= BC + BC^c$

Entonces

$$P(A)= \underbrace{P(A|C)}_{\geq}P(C)+\underbrace{P(A|C^c)}_{\geq}P(C^c) \geq P(B|C)P(C)+P(B|C^c)P(C^c)= P(B)$$

$P(B|C)$ $P(B|C^c)$

NOTAS:

1. El principio se puede traducir coloquialmente en términos que todos conocemos en la vida: Para "valorar" más el evento A que al evento B, A debe ser más "valioso" que B tanto en las buenas como en las malas. Si quieres sopesar a dos amigas, A= Alicia y B= Bárbara, seguro que no darás más peso a Alicia que a Bárbara sólo porque te divertiste más en la fiesta, también las compararás cuando andabas con alguna pena (un examen).

2. ¿Cuándo resulta fácil valorar mejor a A que a B? Cuando fácilmente podamos ver que A contenga a B, $B \subset A$ ya que entonces siempre $P(A) \geq P(B)$. Sin embargo, no siempre se puede saber si $B \subset A$ y en estos casos puede haber términos $P(A|C)$ y $P(A|C^c)$ "escondidos" que al ignorar compararlos con $P(B|C)$ y $P(B|C^c)$ nos lleve a conclusiones falsas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

5.17 La siguiente ilustración se presentó en Colin R. Blyth, "*On Simpson's paradox and the sure-thing principle*", **Journal of American Statistical Association, Vol. 67 (*1972*) Pp 364-365,** también la reseña Chung, K. L. p 143. Este ejemplo muestra que en el análisis estadístico de datos experimentales hay que tener un entendimiento crítico de los conceptos básicos de probabilidad condicional.

Un doctor obtiene datos acerca del efecto (vida y muertes) de un tratamiento reciente y se muestran en la tabla.

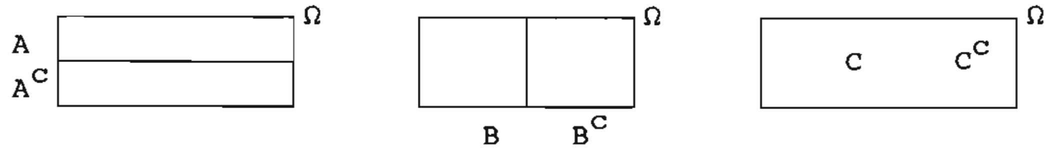
El tratamiento requería un extenso período de vigilancia después de que se les daba de alta. Por este motivo, el médico sólo podía tener pocos pacientes provincianos y así la mayoría de los pacientes fueron citadinos.

	RESIDENTES CITADINOS		RESIDENTES PROVINCIANOS	
	Tratados	No tratados	Tratados	No tratados
VIVOS	1000	50	95	5000
MUERTOS	9000	950	5	5000

Llama:

A: pacientes vivos (A^C: pacientes muertos)
B: pacientes tratados (B^C: pacientes no tratados)
C: pacientes citadinos (C^C: pacientes provincianos)

El espacio muestra puede ser particionado de acuerdo con las dicotomías (dualidades) A ó B ó C como se esquematiza en las siguientes figuras



También se puede dividir conjuntando A y B, partiendo Ω en 4 pedazos como se ilustra en el esquema izquierdo que sigue. Si conjuntamos A, B y C, Ω resulta dividido en 8 pedazos y se muestra en el esquema derecho

	B	B^C
A	AB	AB^C
A^C	A^CB	A^CB^C

Ω	B	B^C
A	ABC^C, ABC	AB^CC, AB^CC^C
A^C	A^CBC, A^CBC^C	A^CB^CC, $A^CB^CC^C$

Los datos que proporciona la tabla corresponden a los 8 pedazos (átomos) mostrados en la última división y se presentan a continuación

	B	B^C
A	95, 1000	50, 5000
A^C	9000, 5	950, 5000

A partir de estos átomos podemos reconstruir los tamaños de otros subconjuntos. Las personas que siguen vivas y que fueron tratadas es AB y están formadas por citadinas y provincianas, es decir

$$AB= ABC + ABC^C$$

$$|AB|= 1000 + 95= 1095$$

Similarmente, $|AB^C|= |AB^CC| + |AB^CC^C|= 5000 + 50= 5050$
Las personas que fueron tratadas y murieron son A^CB y su tamaño es $|A^CB|= |A^CBC| + |A^CBC^C|= 9005$, etc. Estos subconjuntos se muestran a continuación

A	1095	5050
A^C	9005	5950
	B	B^C

Ahora podemos calcular fácilmente las probabilidades condicionadas

$$P(A|B)= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1095}{10100} \sim 10\%$$

$$P(A|B^C)= \frac{P(AB^C)}{P(B^C)} = \frac{|AB^C|}{|B^C|} = \frac{5050}{11000} \sim 50\%$$

La primera es la probabilidad de que una persona sobreviva cuando se someta a tratamiento y la segunda es de que viva cuando no se somete al tratamiento.

Si los resultados (un asunto de vida y muerte) se juzgan por estas probabilidad condicionales concluimos que el tratamiento es un desastre ya que ha disminuido 5 veces el chance de sobrevivir.

Si analizamos con más detalle la misma posibilidad condicional de sobrevivir, cuando son sometidos a tratamiento o cuando no lo son, tenemos

$$\left.\begin{aligned} P(A|BC) &= \frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{1000}{10000} = 0.1 \\ P(A|B^cC) &= \frac{P(AB^cC)}{P(B^cC)} = \frac{50}{1000} = 0.05 \end{aligned}\right\} \text{En citadinos}$$

$$\left.\begin{aligned} P(A|BC^c) &= \frac{P(ABC^c)}{P(BC^c)} = \frac{95}{100} = 95 \\ P(A|B^cC^c) &= \frac{P(AB^cC^c)}{P(B^cC^c)} = \frac{5000}{10000} = 0.50 \end{aligned}\right\} \text{En provincianos}$$

Si en el grupo de citadinos comparamos la sobrevivencia en los tratados y no tratados, tenemos

$$P(A|BC) = 10\% \quad \text{contra } P(A|B^cC) = 5\%$$

lo cual muestra que la sobrevivencia se duplica cuando se someten al tratamiento. Ahora, comparándola también en el grupo de provincianos observamos

$$P(A|BC^c) = 95\% \quad \text{contra} \quad P(A|B^cC^c) = 50\%$$

lo cual indica que la sobrevivencia también se duplicó.

La explicación es: por alguna razón (por ejemplo la contaminación) el grupo de pacientes citadinos C tiene menos chance de recuperarse que los pacientes provincianos C^c y la mayoría de los pacientes que se trataron fueron pacientes C que contribuyeron en alto grado al resultado final, por lo que es natural esperar una lenta recuperación de aquellos pacientes que están más seriamente dañados.

La paradoja aritmética se descubre con las siguientes fórmulas explícitas:

$$P(A|B)= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(ABC) + P(ABC^C)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(ABC)\ P(BC)}{P(BC)\ P(B)} + \frac{P(ABC^C)\ P(BC^C)}{P(BC^C)\ P(B)}$$

$$= P(A|BC)P(C|B) + P(A|BC^C)P(C^C|B)$$

$$P(A|B) = \frac{1000}{10000}\ \frac{10000}{10100} + \frac{95}{100}\ \frac{100}{10100} = \frac{1095}{10100} \sim (10\%)$$

$$P(A|B^C)= P(A|B^C C) +P(C|B^C) + P(A|B^C C^C)P(C^C|B^C)$$

$$= \frac{50}{1000}\ \frac{1000}{11000} + \frac{5000}{10000}\ \frac{10000}{11000} = \frac{5050}{11000} \sim (50\%)$$

Los coeficientes *"escondidos"* $P(C|B)= \frac{10000}{10100} = 0.99$, $P(C^C|B)= \frac{100}{10100} = 0.009$; $P(C|B^C)= \frac{1000}{11000} = 0.09$; $P(C^C|B^C)= \frac{10000}{11000} = 0.909$, fueron los que *"metieron reversa"* en la vida de los pacientes.

Chung, K. L. da la siguiente parábola para clarificar la aritmética. Supón que en dos familias, tanto el esposo como la esposa trabajan, El esposo de la familia 1 gana más que el esposo de la familia 2, la esposa de la familia 1 gana más que la esposa de la familia 2. Para una causa prefijada (o diversión) tanto el esposo como la esposa de la familia 2 contribuyen con la mitad de su salario mensual, pero en la familia 1 el esposo solo contribuye con el 5% de su salario, dejando a su esposa que contribuya con el 95% de su salario. ¿Puedes ver por qué la familia pobre da más a la causa ó gasta más en vacaciones?

5.18 (M. A. Gutiérrez) La confiabilidad de un sistema es la probabilidad de que el sistema funcione satisfactoriamente para un período de tiempo y una situación específica. Un problema básico es determinar la confiabilidad del sistema cuando se conocen las confiabilidades de varios subsistemas o componentes. Supón que un sistema tiene tres subsistemas que lo componen. Considere los eventos

A: primer subsistema funciona
B: segundo subsistema funciona
C: tercer subsistema funciona

Supón que el sistema funciona si uno o más de sus subsistemas funciona. Sea $P(A)= 0.95$, $P(B|A^c)= 0.90$ y $P(C|A^cB^c)= 0.80$, ¿cuál es la confiabilidad del sistema?

SOLUCION

El evento de que el sistema funcione es $A \cup B \cup C$. Una forma de escribir esta unión con subconjuntos desunidos es

$$A \cup B \cup C = A + A^cB + A^cB^cC$$

y así, aplicando el axioma de aditividad logramos

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^cB) + P(A^cB^cC)$$

Aplicando la regla de la cadena o de multiplicación varias veces en las intersecciones tenemos

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B|A^c)P(A^c) + P(C|A^cB^c)P(A^cB^c) \\ &= P(A) + P(B|A^c)P(A^c) + P(C|A^cB^c)P(A^c)\ P(B^c|A^c) \\ &= P(A)+P(B|A^c)\,[1- P(A)]+P(C|A^cB^c)\,[1- P(A)]\,[1- P(B|A^c)] \\ &= 0.095 + (0.90)(0.05) + (0.80)(0.05)(0.10) = 0.999 \end{aligned}$$

(Miguel A. Gutiérrez, Departamento de Sistemas, UAM-A).

RESTAURANDO LA OPINION A LA LUZ DE NUEVA INFORMACION

5.19 Consideremos un médico que está ponderando el siguiente dilema: "Si tengo al menos una confianza del 80% de que mi paciente tiene esta enfermedad, entonces siempre recomiendo cirugía, pero si no alcanzo ese nivel de confianza, entonces recomiendo exámenes adicionales que son caros y algunas veces dolorosos. Ahora, inicialmente sólo tenía una certeza del 60% de que el Sr. Jones tenía la enfermedad, por lo que ordené practicarle el examen A, el cual siempre da un resultado positivo cuando el paciente tiene la enfermedad y casi nunca cuando el paciente está saludable. El examen resultó positivo y estaba convencido de recomendar una cirugía cuando el Sr. Jones me informó, por primera vez, que es diabético. Esta información complica el asunto porque, aunque no cambia mi estimación original del 60% de probabilidad de que tenga la enfermedad, afecta la interpretación de los resultados del examen A. Esto se debe a que el examen A nunca produce un resultado positivo cuando el paciente está sano, pero desafortunadamente un 30% de las veces da un resultado positivo en el caso de pacientes diabéticos que no sufren la enfermedad bajo cuestión. Ahora, ¿qué debo hacer? ¿practicar otros exámenes o proceder inmediatamente a una cirugía?"

SOLUCION

Para decidir lo que se debe hacer, el doctor debería primero calcular la probabilidad actualizada de que Jones tenga la enfermedad dado que el examen A resultó positivo, actualizada en el sentido de que incopore la reciente información de que es diabético. Antes de calcularla, vamos a indicar simbólicamente la misma probabilidad de tener la enfermedad pero la probabilidad *a priori* antes de conocer que es diabético. Los simbolos que usaremos son los siguientes

E: evento de que Jones tenga la enfermedad,
R^+: el examen A resultó positivo,
D: Jones es diabético.

En realidad el evento D es un evento seguro, pues al Sr. Jones se lo confirmaron hace mucho tiempo pero se le olvidó comunicarlo al médico.

La incertidumbre antes de conocer que era diabético:

$P(E)= 0.6$ (basada en los síntomas que indica el paciente)

$$P(R^+)= P(E)P(R^+|E) + P(E^C)P(R^+|E^C)$$

Como la confiabilidad del análisis clínico es

$P(R^+|E)= 1; \qquad P(R^+|E^C)= 0$

entonces

$P(R^+)= P(E)P(R^+|E)= 0.6(1)= 0.6$

y por lo tanto

$$P(E|R^+)= \frac{P(ER^+)}{P(R^+)} = \frac{P(E)P(R^+|E)}{P(R^+)} = \frac{0.6(1)}{0.6} =1$$

El médico recomendaría cirugía después de encontrar que los análisis fueron positivos pero sin saber que era diabético.

Incertidumbre después de conocer que es diabético:

Con la información de que es diabético, las probabilidades anteriores cambian excepto la probabilidad no condicional de tener la enfermedad que sólo se evalúa en datos históricos sobre los síntomas que presenta el enfermo y ahora las diferenciaremos con el subíndice *.

$$P_*(E)= P(E) = 0.6$$

$$P_*(R^+)= P_*(E)P_*(R^+|E) + P_*(E^C)P_*(R^+|E^C)$$

Como la confiabilidad del análisis clínico en personas diabéticas es

$$P_*(R^+|E)= 1; \qquad P_*(R^+|E^C)= 0.30$$

resulta que

$$P_*(R^+) = 0.6(1) + 0.40(0.30) = 0.72$$

y

$$P_*(E|R^+) = \frac{P_*(ER^+)}{P_*(R^+)} = \frac{P_*(E)P_*(R^+|E)}{P_*(R^+)} = \frac{0.6(1)}{0.72} = 0.833$$

Ahora, puesto que el doctor tiene una confianza mayor del 80% de que el Sr. Jones tiene la enfermedad, debería recomendar cirugía.

5.20 (M. A. Gutiérrez). Un laboratorio médico tiene una serie de pruebas para detectar una enfermedad. Las pruebas no dan indicaciones falsas de enfermedad, pero no siempre detectan su presencia.

En símbolos

$$P\left(\begin{matrix}\text{prueba}\\ \text{positiva}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{no tiene}\\ \text{enfermedad}\end{matrix}\right) = 0, \quad \text{o sea} \quad P\left(\begin{matrix}\text{prueba}\\ \text{negativa}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{no tiene}\\ \text{enfermedad}\end{matrix}\right) = 1$$

y

$$P\left(\begin{matrix}\text{prueba}\\ \text{positiva}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{tiene}\\ \text{enfermedad}\end{matrix}\right) < 1, \quad \text{o sea} \quad P\left(\begin{matrix}\text{prueba}\\ \text{negativa}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{tiene}\\ \text{enfermedad}\end{matrix}\right) > 1$$

Las pruebas se aplican en sucesión hasta que una de ellas detecta la presencia de la enfermedad o se pasan satisfactoriamente. La primera prueba tiene probabilidad a de detectar la enfermedad. La segunda prueba tiene probabilidad b de detectar la enfermedad. La tercera prueba tiene probabilidad c de detectar la enfermedad. Supón que $a + b + c \geq 1$. ¿Es correcto suponer que esta serie de pruebas es completamente confiable para detectar la enfermedad?

SOLUCION

Sean A, B y C los eventos que la enfermedad sea detectada en la primera, segunda y tercera prueba, respectivamente. Sea D el evento que la persona examinada tenga la enfermedad. De acuerdo a los datos, sabemos $P(A|D) = a$, $P(B|A'D) = b$, $P(C|A'B'D) = c$. Entonces la probabilidad de falla de la serie de pruebas es

$$P(A'B'C'|D) = P(A'|D)\ P(B'|A'D)\ P(C'|A'B'D)$$
$$= (1-a)(1-b)(1-c)$$

y este número es cero, únicamente cuando alguno de los valores a, b ó c es 1. Por lo tanto, no es correcto pensar que la serie de pruebas es completamente confiable.

5.21 TRASLADO DE BOLAS.

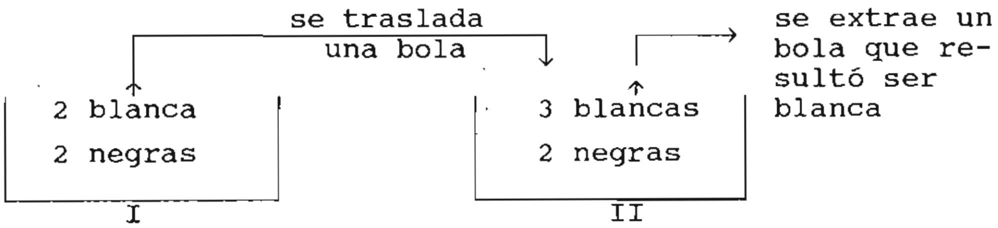
Una urna I contiene 2 bolas blancas y 2 negras.

Una urna II contiene 3 bolas blancas y 2 negras.

Se traslada una bola de la urna I a la II, después se extrae una bola de la II, que resulta blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola trasladada fuese blanca?

SOLUCION

La realización del experimento se ilustra en el esquema



donde se vislumbran los dos subexperimentos trasladar una bola de la urna I a la II y extraer una bola de esta última.

Llama con B_1 al evento de obtener una bola blanca en la primera extracción (de la urna I), por tanto $B_1^C = N_1$ indica obtener negra en el mismo subexperimento.

Llama con B_2 el evento de observar una bola blanca en la segunda extracción (de la urna II) y así $B_2^C = N_2$ sería el evento de obtener negra.

La probabilidad de que la bola trasladada sea blanca dado que la bola extraída ha sido blanca está indicada por $P(B_1|B_2)$ y es

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1B_2)}{P(B_2)}$$

Ahora $\qquad B_2 = B_1B_2 + B_1^CB_2$

$$P(B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) + P(B_1^C)P(B_2|B_1^C)$$

y así resulta la fórmula de Bayes:

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_1)P(B_2|B_1)}{P(B_1)P(B_2|B_1)+P(B_1^C)P(B_2|B_1^C)} = \frac{(\frac{2}{4})(\frac{4}{6})}{(\frac{2}{4})(\frac{4}{6})+(\frac{2}{4})(\frac{3}{6})} = \frac{4}{7}$$

5.22 En la fabricación de cierto artículo se encuentra que un tipo de defecto A se presenta con probabilidad 0.1 y otro tipo de defecto B con probabilidad 0.05

Se supone independencia entre los tipos de defectos.

a) Hallar la probabilidad de que un artículo no tenga defectos.

b) Si un artículo es defectuoso, hallar la probabilidad de que tenga el defecto A

SOLUCION

a) Llama por A y B a los eventos que siguen:

A: el artículo tiene el defecto A

B: el artículo tiene el defecto B

Nos interesa encontrar la probabilidad de que al tomar al azar un artículo de un lote, no tenga ni el defecto A ni el defecto B, o sea que nos piden $P(A^CB^C)$.

La hipótesis de que A y B son independientes implica que A^c y B^c son independientes (ver guía anexa). Entonces si también A^c y B^c son independientes podemos decir que

$$P(A^cB^c) = P(A^c)\ P(B^c) = [1 - P(A)][1 - P(B)]$$
$$= (1 - 0.1)\ (1 - 0.05) = 0.855$$

OTRA FORMA. Sabiendo que $A^cB^c = (A \cup B)^c$, según Morgan, tenemos:

$$\begin{aligned} P(A^cB^c) &= P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)] \\ &= 1 - (0.1 + 0.05 - (0.1)(0.05)) \\ &= 0.855 \end{aligned}$$

b) Llama D al evento de que el artículo elegido sea defectuoso. Nos piden que se encuentre la probabilidad de que tenga el defecto tipo A dado que se conoce que fue defectuoso, o sea, $P(A|D)$. Por definición de probabilidad condicional tenemos:

$$P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)}$$

Observa que el evento AD, tenga el defecto A y a la vez uno o dos de los dos tipos de defectos, corresponde al evento A. Es decir

$$A \subset A \cup B = D \quad \Longrightarrow \quad A(A \cup B) = A$$

Por lo tanto, $\quad P(A) = \dfrac{P(A)}{P(D)}$

La probabilidad $P(A)$ es dato, $P(A) = 0.1$

Solo resta calcular $P(D)$. Como D es el evento de que el artículo fue defectuoso, significa que

$$D= A \cup B= AB^C + A^CB + AB = A + A^CB$$

y su probabilidad es

$$P(D)= P(A) + P(B) - P(AB)= P(A) + P(B) - P(A)P(B)= 0.145$$

Por lo tanto,

$$P(A|D)= \frac{P(A)}{P(D)} = \frac{0.1}{0.145} = 0.689$$

¿Es lógico este resultado?

Otra forma de encontrar $P(D)$. Se antoja usar la ley de probabilidad total, ya que D se puede ver a través de una partición de Ω:

$$D= D\Omega = D(AB^C + A^CB + AB + A^CB^C)$$

$$D= AB^C + A^CB + AB + \emptyset$$

$$P(D)= P(A)\ P(B^C|A) + P(A^C|B)P(B) + P(A)P(B|A)$$

como luce "laborioso" mejor vemos su complemento

$$P(D)= 1 - P(D^C)= 1 - P(A^CB^C)= 1 - 0.855= 0.145$$

donde $P(A^CB^C)= 0.855$ se calculó en (a).

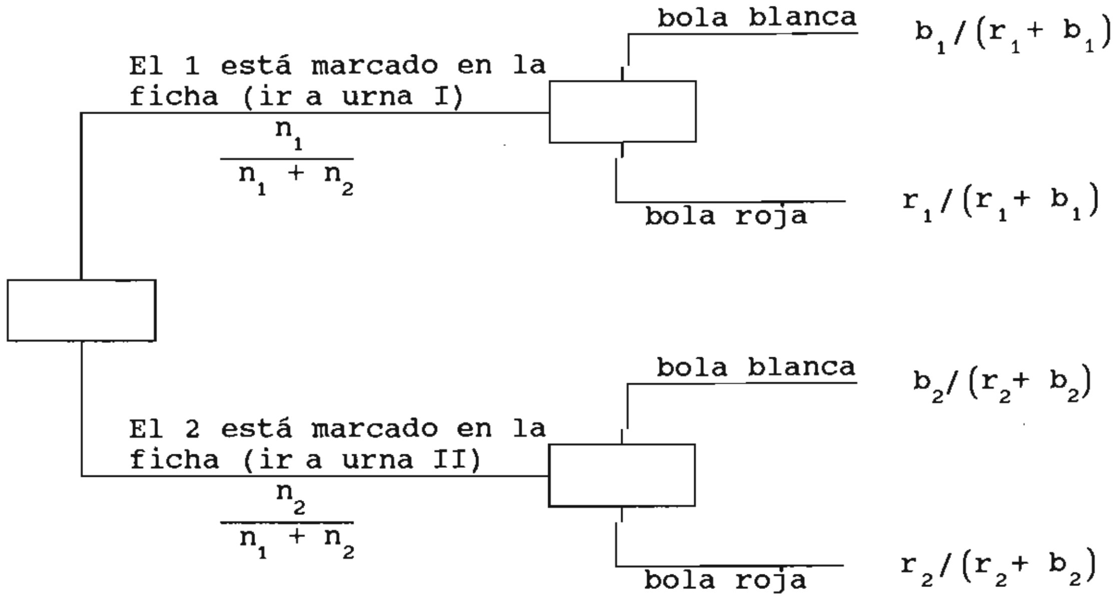
5.11 (G. Martínez). Una caja contiene n_1 fichas que están marcadas con 1 y n_2 fichas con el número 2 marcado en su cara. Se toma una ficha al azar. Si sale una ficha con un 1 se va a la urna U_1 en la que hay r_1 bolas rojas y b_1 bolas blancas y se extrae una bola al azar, mientras que si sale una ficha con un 2 se debe ir a la otra urna, U_2, en la que hay r bolas rojas y b_2 bolas blancas y se toma una bola al azar. ¿Qué probabilidad se tienen de extraer a una bola roja?

SOLUCIÓN

El resultado final ω es el color de la bola extraida, pero antes se realiza un primer subexperimento, el sacar una ficha. Entonces, podemos vislumbrar que tenemos dos etapas a realizar sucesivamente, una antes que otra, ya que lo que haremos en la segunda depende del resultado de la primera.

En la primera etapa sacamos una ficha con dos posibles resultados y, por tanto, dos posibles acciones a seguir, en otras palabras, la segunda etapa depende del resultado de la primera. Si la ficha tiene marcado un 1, la acción que seguimos es ir a la urna 1 y comenzaremos la segunda etapa. Si resulta que la ficha está marcada con un 2 vamos a la urna II y comenzamos la segunda etapa.

Esta secuencia de operaciones puede representarse gráficamente por los llamados diagramas de árboles que mejor deberíamos llamarlos crucigramas, criptogramas u otro nombre que le guste pues a fin de cuentas los árboles crecen de abajo hacia arriba no de izquierda a derecha. Para nuestro problema, este criptograma es:



¿Lo descifras? El punto (nodo) que está más a la izquierda representa la primera etapa (subexperimento) de sacar una ficha. Los (nodos) más a la derecha representan la segunda etapa (subexperimento) de sacar una bola. Las líneas (aristas) que salen de un punto (nodo) representan los resultados posibles al realizar la etapa precedente representada por el punto del cual salen.

El resultado final de observar una bola roja se obtiene al "contabilizar" las distintas formas de que salga roja o sea de contabilizar los resultados que están más a la derecha del diagrama:

$$P(\text{bola roja}) = P\begin{pmatrix}\text{bola roja venga}\\ \text{de urna I}\end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}\text{bola roja venga}\\ \text{de urna II}\end{pmatrix}$$

Si llamamos á los eventos por

- R: extraer bola roja
- H_1: extraer ficha marcada con 1
- H_2: extraer ficha marcada con 2

entonces:

$$P(R) = P(RH_1) + P(RH_2) = P(H_1)\ P(R|H_1) + P(H_2)\ P(R|H_2)$$

$$= \frac{n_1}{n_1+n_2}\,\frac{r_1}{r_1+b_2} + \frac{n_2}{n_1+n_2}\,\frac{r_2}{r_1+b_2}$$

(G. Martínez G. Departamento de Sistemas, UAM Azc.)

5.12 CONGESTIONAMIENTO EN CARRETERAS

La figura muestra la intersección de dos supercarreteras I_1 e I_2 que se unen formando I_3. Las flechas solo muestran la dirección que interesa analizar.

Asume que I_1 e I_2 tienen iguales capacidades, que los eventos que estén congestionados se denotan por los mismos símbolos con que se identifican las carreteras y que se dispone de la siguiente información:

$$P(I_1) = P(\text{Tráfico excesivo en } I_1) = 10\%$$
$$P(I_2) = P(\text{Tráfico excesivo en } I_2) = 20\%$$

Además denotando $P(I_1|I_2)$ como la probabilidad de tráfico excesivo en I_1, dado el tráfico excesivo en I_2, se conoce

$$P(I_1|I_2) = 50\% \quad \text{y} \quad P(I_2|I_1) = 100\%$$

a) Si la capacidad de I_3 es la misma que para I_1 ó I_2, ¿Cuál es la probabilidad de tráfico excesivo en I_3? Asume que cuando I_1 e I_2 operan a un nivel inferior al de su capacidad, I_3 opera con tráfico excesivo con probabilidad de 20%.

b) Si la capacidad de I_3 es dos veces la de I_1 ó I_2, ¿Cuál es la probabilidad de tráfico excesivo en I_3? Supón que sólo si I_1 ó I_2 tienen tráfico excesivo (sólo una de ellas), la capacidad de I_3 será excedida con una probabilidad de 15% o en símbolos

$$P(I_3|I_1I_2^C)= P(I_3|I_1^CI_2)= 0.15$$

SOLUCIÓN

a) Primero, se observa que la probabilidad de tránsito excesivo en I_3 dependerá de las condiciones de tráfico en I_1 e I_2, las cuales pueden ser: I_1I_2, $I_1^CI_2$, $I_1I_2^C$ ó $I_1^CI_2^C$ con las siguientes probabilidades:

$$P(I_1I_2)= P(I_1|I_2)\ P(I_2)= 0.5 \times 0.2 = 0.1$$

$$P(I_1^CI_2)= P(I_1^C|I_2)\ P(I_2)= [1 - P(I_1|I_2)]\ P(I_2)$$

$$= 0.5(0.2)= 0.10$$

donde recomendamos la bien conocida relación

$$P(A^C|B)= 1 - P(A|B)$$

$$P(I_1I_2^C)= P(I_2^C|I_1)\ P(I_1)= [1 - P(I_1|I_2)]\ P(I_1)= 0$$

$$P(I_1^CI_2)= 1- P[(I_1^CI_2^C)^C]= 1- P(I_1 \cup I_2)$$

$$= 1- [P(I_1I_2)+P(I_1^CI_2)+P(I_1I_2^C)]$$

$$P(I_1^CI_2)= 1 - (0.1 + 0.1 + 0)= 0.80$$

Ahora $P(I_3)= P(I_3I_1I_2) + P(I_3I_1^CI_2) + P(I_3I_1I_2^C) + P(I_3I_1^CI_2^C)$

Entonces,

$$P(I_3)= P(I_3|I_1I_2)P(I_1I_2) + P(I_3|I_1^CI_2)P(I_1^CI_2) +$$

$$P(I_3|I_1I_2^C)P(I_1I_2^C) + P(I_3|I_1^CI_2^C)\ P(I_1^CI_2^C)$$

El claro que el tráfico en I_3 será excesivo cuando el tráfico en I_1ó I_2, ó ambos, sea excesivo por lo que $P(I_3|I_1I_2)= 1$, $P(I_3|I_1I_2^C)= 1$ y $P(I_3|I_1^CI_2)= 1$ ya que la capacidad para cada una de las carreteras es la misma.

También se tiene de los datos que $P(I_3|I_1^cI_2^c)= 0.20$, por lo tanto, $P(I_3)= 1.0(0.10) + 1.0(0.10) + 1.0(0) + 0.20(0.80)= 0.36$

b) En este caso, la carretera 3 tiene el doble de capacidad que el de I_1 ó I_2, se nos informa que

$$P(I_3|I_1I_2^c)= P(I_3|I_1^cI_2)= 0.15$$

Además es lógico que I_3 estará congestionada cuado I_1 e I_2 lo estén, por lo que

$$P(I_3|I_1I_2)= 1$$

También es lógico que

$$P(I_3|I_1^cI_2^c)= 0$$

por lo tanto

$$P(I_3)= P(I_3|I_1I_2)\ P(I_1I_2) + P(I_3|I_1^cI_2)\ P(I_1^cI_2) +$$
$$P(I_3|I_1I_2^c)P(I_1I_2^c) + P(I_3|I_1^cI_2^c)\ P(I_1^cI_2^c)$$

resulta

$$P(I_3)= 1.0(0.1) + 0.15(0.10) +).15(0) + 0(0.80)= 0.115$$

Compara el resultado con el encontrado en el caso (a).

MINICASO 1

Se tiene una urna con 3 bolas rojas, 1 roja, 1 verde y 1 azul. Considérese que el experimento consiste en extraer dos bolas sin reemplazo, encuentra la probabilidad de obtener 1 bola roja y 1 azul.

SOLUCIÓN

Nota que el evento, llamémoslo C, de obtener una bola roja y la otra azul puede manejarse como la unión de dos eventos: el evento de que la primera sea roja y la segunda sea azul y el evento de que la primera sea azul y la segunda extracción roja. Cada evento se lleva en dos fases (etapas): una fase es la primera extracción, la otra fase es la segunda extracción.

Si acordamos la notación

$C=$ Obtener una bola roja y una azul.

$A_1=$ Obtener bola azul en la 1a. extracción.

$A_2=$ Obtener bola azul en la 2a. extracción.

$R_1=$ Obtener bola roja en la 1a. extracción.

$R_2=$ Obtener bola roja en la 2a. extracción.

entonces

$$C= A_1R_2+ R_1A_2$$

$$P(C)= P(A_1R_2) + P(R_1A_2)$$

$$P(C)= P(A_1)\ P(R_2|A_1) + P(A_2)\ P(A_2|R_1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Una manera más elegante de visualizar la forma de condicionar al evento C es considerar la primera extracción como una dicotomía. En la primera extracción sólo puede suceder que sea roja o que no sea roja: sea R_1 o R_1^c. Entonces, el evento C se puede expresar en términos de esta primera extracción como la siguiente unión desunida:

$$C= R_1C + R_1^cC$$

$$P(C)= P(R_1)\ P(C|R_1) + P(R_1^c)\ P(C|R_1^c)$$

Ahora, $P(R_1)= 1/3$, $P(R_1^c)= 1 - P(R_1)= 2/3$, y sólo falta encontrar $P(C|R_1)$ y $P(C|R_1^c)$. Recordando que C es el evento de sacar una bola azul y otra roja, habrá que interpretar con cuidado $P(C|R_1)$ y $P(C|R_1^c)$. En la primera probabilida condicional no hay mucha dificultad

$$P(C|R_1)= P\left(\begin{array}{l}\text{sacar una bola azul}\\ \text{y una roja}\end{array} \;\middle|\; \text{primera bola fue roja}\right)= 1/2$$

La otra probabilidad condicional requiere más reflexión, y es igual $P(C|R_1^c)= 1/4$.

¿Puedes justificarlo mentalmente? No es fácil. Lo justificaremos después, por lo pronto tómalo como verdadero para sustituirlo en $P(C)$:

$$P(C) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right) = 1/3.$$

Justificación de que $P(C|R_1^C) = 1/4$.

La probabilidad condicional $P(C|R_1^C) = 1/4$ puede verse como una medida de ocurrencia del evento C en un nuevo espacio muestral

$$\Omega_* = \{azul, verde\} = \{a, v\}$$

que es una reducción del espacio muestral original $\Omega = \{a, v, r\}$. Así que nuestro problema se reduce a conocer

$$P_*(C) = P(C|R_1^C)$$

Sólo que hay un pequeño problema para evaluar rápidamente la ocurrencia de C en este espacio muestral Ω_*, pues a pesar de saber que salió algunos de sus elementos, no sabemos cuál de ellos ocurrió, pudo haber salido la bola azul o la verde, y por lo tanto, no visualizar rápidamente $P_*(C)$. Sin embargo, viéndola como una probabilidad no condicional, podemos remedar la siguiente ley de probabilidad total

$$P(F) = P(E)P(F|E) + P(E^C)P(F|E^C)$$

pues P_* es también una probabilidad. Recuerda que esta ley surge al elegir cualquier conjunto E de interés, pues siempre E y E^C forman una partición del espacio muestral que se esté considerando. Por aplicarla a $P_*(C)$ visualizamos la siguiente partición de Ω_*:

$$\Omega_* = \{a, v\} = \{a\} + \{v\} = \{a\} + \{a\}_*^C$$

Nota que $\{a\}_*^C$ significa complemento con respecto a Ω_* y no con respecto a $\Omega = \{a, v, r\}$. Para evitar confusión, podríamos escribir $\Omega_* \setminus \{a\}$ en lugar de $\{a\}_*^C$, pero no lo haremos. Aplicando la ley a $P_*(C)$:

$$P_*(C) = P_*(\{a\})\ P_*(C|\{a\}) + P_*(\{a\}_*^C)\ P_*(C|\{a\}_*^C)$$

Los términos $P_*(\{a\})$ y $P_*(\{a\}_*^C)$ son fáciles de evaluar, sólo recuerda que el espacio muestral de referencia es $\Omega_* = \{a,v\}$:

$$P_*(\{a\}) = 1/2; \qquad P_*(\{a\}_*^C) = 1 - P_*(\{a\}) = 1/2$$

Entonces

$$P_*(C) = \frac{1}{2}\ P_*(C|\{a\}) + \frac{1}{2}\ P_*(C|\{a\}_*^C) \qquad (1)$$

Los términos que restan son más complicados pues su ocurrencia no se evalúa sobre Ω_* sino sobre otros espacios muestrales. Sin embargo, la probabilidad condicional $P_*(C|\{a\})$ puede verse como una probabilidad no condicional $P_{**}(C)$, medida sobre otro espacio muestral $\Omega_{**} = \{v,r\}$ que ahora es la reducción de Ω al conocer que $\{a\}$ ocurrió; o sea que:

$$\Omega_{**} = \Omega \backslash \{a\} = \Omega \cap \{a\}^C = \{v,r\}$$

Evaluando la ocurrencia de C en este espacio muestral resulta que

$$P_{**}(C) = 1/2$$

El razonamiento es el siguiente. Hay que recordar el papel que tiene esta probabilidad en la expresión

$$P_*(C) = P_*(C \cap \{a\}) + P_*(C \cap \{a\}_*^C)$$

y en particular en

$$P_*(C \cap \{a\}) = P_*(\{a\})\ P_*(C|\{a\}) = P_*(\{a\})\ P_{**}(C).$$

Observa que al evaluar $P_{**}(C)$ estamos evaluando la ocurrencia de sacar sólo una bola roja aunque C signifique sacar una roja y una azul, pues damos por hecho que la bola azul ya ocurrió (precisamente estamos condicionando sobre este hecho), por lo tanto, la ocurrencia de sacar una bola roja en $\Omega_{**} = \{r,v\}$ es 1/2.

Por último, la probabilidad condicional $P_*(C|\{a\}_*^c)$ puede verse como una probabilidad no condicional $P_{***}(C)$ sobre un espacio muestral Ω_{***} igual a

$$\Omega_{***} = \Omega \setminus \{a\}_*^c = \Omega \setminus \{v\} = \{r,a\}$$

En este espacio muestral, el evento C tiene probabilidad igual a cero, pues imposible que después de haber obtenido una bola verde resulten las dos bolas deseadas (la roja y la azul) en una sola extracción. Sustituyendo en (1), obtenemos

$$\begin{aligned} P_*(C) &= \frac{1}{2} P_*(C|\{a\}) + \frac{1}{2} P_*(C|\{a\}_*^c) \\ &= \frac{1}{2} P_{**}(C) + \frac{1}{2} P_{***}(C) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(0) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

OTRA SOLUCIÓN

Si no echáramos mano de la probabilidad condicional, tendríamos que conocer el tamaño del espacio muestra Ω.

El enunciado del problema no indica que interese el orden en que se extraen las dos bolas. Sin embargo, debido a que la selección se hace sin reemplazo sabemos que podemos considerar un modelo ordenado o uno sin orden para asignar las probabilidades a los eventos que nos interese y obtener las mismas respuestas.

Modelo combinatorio de selección sin importar el orden:

La selección de las dos bolas se puede representar por $\omega = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Entonces, la colección de todas las posibles selecciones es

$$\Omega = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in (r,v,a);\ \alpha_1 \neq \alpha_2\}$$

$$\Omega = \{(r,v), (r,a), (v,a)\} = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$$

$$|\Omega| = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

El evento C de obtener una bola roja y otra azul es $C = \{(r,a)\}$ y vemos que sólo aparece una vez en el espacio muestra Ω. Por lo tanto

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = 1/3$$

Modelo combinatorio de selección ordenado:

Si interesa representar el problema en forma ordenada, entonces cada selección ω de bolas se puede indicar por $\omega = (\alpha_1, \alpha_2)$, entendiendo que α_1 fue la primera bola extraida y α_2 la segunda bola extraida. El espacio muestra es

$$\Omega_* = \{(\alpha_1,\alpha_2) : \alpha_1 \in (r,v,a);\ \alpha_1 \neq \alpha_2\}$$

$$\Omega_* = \{(r,v),(v,r),(r,a),(a,r),(v,a),(a,v)\}$$

Se observa que $|\Omega_*| = 3(2) = 6$

El evento C de obtener una bola roja y una azul sin importar el orden en que salió un color y el otro, se puede indicar por la siguiente unión

$$C = \{(r,a)\} + \{(a,r)\}$$

$$P(C) = P(\{(r,a)\}) + P(\{(a,r)\})$$

$$= 1/6 + 1/6 = 1/3$$

MINICASO 2. RELACIONES ENTRE ESPACIOS MUESTRASLES DE LOS SUBEXPERIMENTOS CON EL ESPACIO DEL EXPERIMENTO

En seis pernos, hay dos que son más cortos que la longitud especificada por los clientes. Se escogen dos pernos al azar. Escuentra la probabilidad de que los dos pernos sean defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el primero de ellos sea defectuoso y qué el segundo sea defectuoso?

SOLUCIÓN

Llamando D_1, D_2, y D a los siguientes eventos

D_1: el primer perno elegido es defectuoso.

D_2: el segundo perno elegido es defectuoso.

D: los dos pernos son defectuosos.

podemos considerar al evento D como la intersección de D_1 y D_2 y obtener

$$P(D)= P(D_1D_2)= P(D_1)P(D_2|D_1)= \frac{2}{6}\ \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

Las otras probabilidades pedidas son

$$P(D_1)= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(D_2)= P(D_2D_1) + P(D_2D_1^C)= P(D_1)P(D_2|D_1)+ P(D_1^C)P(D_2|D_1^C)$$

$$= \frac{2}{6}\ \frac{1}{5} + \frac{4}{6}\ \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$$

Es curioso que $P(D_2)= 1/3$ se mantenga constante a $P(D_1)$ no obstante que la selección es sin reemplazo. La razón es que $P(D_2)$ no es una probabilidad condicional.

Ahora queremos analizar la relación de los espacios muestrales de los subexperimentos individuales con el espacio muestral de experimento compuesto. Estamos hablando de tres experimentos, dos individuales y uno compuesto; y de sus respectivos espacios muestrales donde estamos definiendo distintos eventos.

Subexperimento 1: Extraer un perno.

Subexperimento 2: Extraer un perno por segunda vez.

Experimento: Extraer dos pernos.

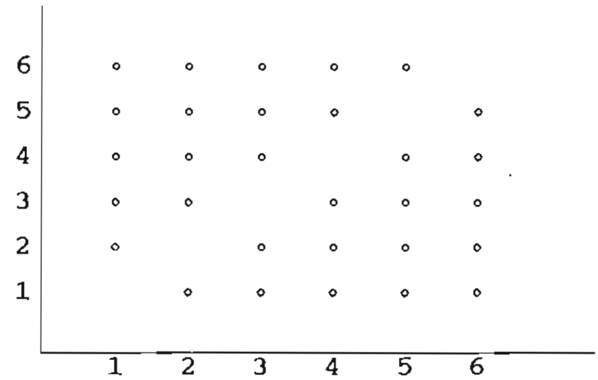
Sus respectivos espacios muestrales y sus tamaños son los siguientes:

$\Omega_1= \{\alpha_1 |\ \alpha_1 \in \{1,2,3,4,5,6\}\};$ $\qquad |\Omega_1|= 6$

$\Omega_2= \{\alpha_2 |\ \alpha_2 \in \{1,2,3,4,5,6\} \setminus\{\alpha_1\}\};$ $\qquad |\Omega_2|= 5$

$\Omega = \{\omega = (\alpha_1,\alpha_2) |\ \alpha_1,\alpha_2 \in \{1,2,3,4,5,6\};\ \alpha_1 \neq \alpha_2\};$ $\qquad |\Omega|= 6x5= 30$

La representación geométrica de Ω es la siguiente.



El espacio muestral del experimento, el experimento compuesto, se puede expresar en términos de los espacios muestrales Ω_1 y Ω_2 usando el concepto matemático de *producto cartesiano* que se define como sigue. El producto cartesiano de dos conjuntos (a,b) cuya primera componente a se elige del conjunto A y su segunda componente b se elige del conjunto B. El producto cartesiano de A y B se indica por AxB, por lo tanto, la definición anterior se expresa simbólicamente de la siguiente manera:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A;\ b \in B\}$$

Usando esta definición de producto cartesiano, obtenemos la relación entre los tres espacios Ω_1, Ω_2 y Ω.

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

Dos formas de ver el evento D_1:
La manera en que definimos el evento D_1, que el perno elegido en la primera extracción sea defectuoso, sugiere que el D_1 es evento del experimento individual de extraer un solo perno, no del experimento "compuesto" de extraer dos pernos, por lo que D_1 se puede ver como un subconjunto del espacio muestral de Ω_1. Así, si imaginamos que los seis pernos están etiquetados con los números del 1 al 6 y que los pernos defectuosos tienen las etiquetas 1 y 2, la observación anterior corresponde a

$$D_1 = \{1,2\} \subset \Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Sin embargo, el evento D_1 también puede visualizarse como un subconjunto del espacio bidimensional $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ en el siguiente sentido: El evento D_1 es la colección de parejas $\omega = (\alpha_1, \alpha_2)$ donde su primera componente α_1 es uno de los pernos defectuosos y su segunda componente α_2 es cualquiera de los pernos que pueda resultar en la segunda extracción. En otras palabras, piensa que sólo estamos concentrados en el primer subexperimento y que no nos preocupa lo que suceda en las extracciones futuras. En símbolos:

$$D_1 = \{\omega = (\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 \in \{1,2\};\ \alpha_2 \in \Omega_2\} \subset \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2\}$$

y su tamaño sería $|D_1| = 2 \times 5 = 10$

Las dos interpretaciones del evento D_1 parecen contradictorias, pues en la primera D_1 es subconjunto de un espacio unidimensional Ω_1 y en la segunda, de un espacio bidimensional $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Si somos estrictos, sí hay contradicción, sobre todo porque estamos usando el mismo símbolo D_1 para dos conjuntos diferentes; sin embargo, si los intepretamos correctamente podemos evaluar bien la probabilidad del evento D_1. En la primera interpretación

$$P(D_1) = \frac{|D_1|}{|\Omega_1|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

y en la segunda interpretación

$$P(D_1) = \frac{|D_1|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Esta última probabilidad está evaluada en otro espacio muestral Ω y podríamos identificarla por P_* para entonces decir

$$P_*(D_1) = \frac{|D_1|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

En caso de que te moleste la imprecisión de la notación anterior, puedes definir un nuevo símbolo para la segunda interpretación de D_1, por ejemplo D_1^*, y definirlo por

$$D_1^* = D_1 \times \Omega_2$$

y así, visto como subconjunto de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, no corremos peligro al evaluar su probabilidad:

$$P(D_1^*) = \frac{|D_1^*|}{|\Omega|} = \frac{10}{30}$$

Dos formas de ver al evento D_2:
El evento de sacar un perno defectuoso en la segunda extracción, el evento D_2, puede visualizarse como subconjunto de Ω_2 o de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, en forma similar a cómo analizamos el evento D_1, sólo que en el análisis de D_2 debemos ser más cuidadosos pues el resultado del segundo subexperimento está supeditado al del primero. Los detalles son los que siguen.

Primero consideraremos a D_2 como subconjunto del espacio unidimensional $\Omega_2 = \Omega_1 \setminus \{\alpha_1\}$, o sea

$$D_2 = \{\alpha_2 \mid \alpha_2 \in \{1,2\};\ \alpha_2 \neq \alpha_1\} \subset \Omega_2$$

Visto de otra manera, no podemos conocer $|D_2|$ pues puede ser $|D_2| = 2$ o $|D_2| = 1$; aunque el tamaño de Ω_2 sí esté bien definido. Por lo tanto, no podemos encontrar su probabilidad por medio de la definición $P(D_2) = |D_2|/|\Omega_2|$, sólo se podrán evaluar probabilidades condicionales de D_2. El remedio es usar el socorrido truco que ya conocemos, es decir, descomponer a D_2 en eventos desunidos, $D_2 = D_1 D_2 + D_1^c D_2$, y usar dos veces la regla de la cadena, en $D_1 D_2$ y en $D_1^c D_2$, que involucra condicionales:

$$P(D_2) = P(D_1)P(D_2 \mid D_1) + P(D_1^c)P(D_2 \mid D_1^c)$$

como lo hicimos al principio.

La otra forma de visualizar a D_2 es como subconjunto de $\Omega = \Omega_1 x\ \Omega_2$

$$D_2 = \{\omega = (\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 \in \Omega_1,\ \alpha_2 \in \{1,2\};\ \alpha_2 \neq \alpha_1\}$$

$$D_2^* = \Omega_1 x\ D_2$$

Para encontrar su tamaño concentra la atención en que α_2 debe ser defectuoso, por lo que "reserva" uno de los dos defectuosos para el resultado α_2, así para el resultado α_1 sólo quedan cinco caminos:

$$|D_2^*| = |\Omega_1|\ |D_2| = \ 5\ x\ 2 = 10$$

$$P(D_2^*) = \frac{|D_2|}{|\Omega|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

SUMARIO. PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

(1) $P(B|A) = \dfrac{|AB|}{|A|} = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ (Una nueva medida sobre A)

(2) $P(A|B) = \dfrac{|AB|}{|B|} = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ (Una nueva medida sobre B)

(3) $P(B^C|A) = 1 - P(B|A)$ (La misma medida que en (1))

(4) $P(A^C|B) = 1 - P(A|B)$ (La misma medida que en (2))

(5) $P(C|AB) = \dfrac{P(ABC)}{P(AB)}$

(6) $P(BC|A) = \dfrac{P(ABC)}{P(A)}$

REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN O DE LA CADENA (un artificio para encontrar probabilidades no condicionales al condicionar a nuestra conveniencia).

(7) $P(AB) = P(A)\ P(B|A)$

(8) $P(AB) = P(B)\ P(A|B)$

(9) $P(A)\ P(B|A) = P(AB) = P(B)\ P(A|B)$

(10) $P(ABC) = P(AB)\ P(C|AB) = P(A)\ P(B|A)\ P(C|AB)$

PROBABILIDAD TOTAL (otro artificio para encontrar probabilidades no condicionales al condicionar a nuestra conveniencia).

(11) $P(B) = P(AB) + P(BA^C)$

(12) $P(B) = P(A_1)\ P(B|A_1) + P(A_2)\ P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)\ P(B|A_n)$

cuando $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forman una división de Ω ($\Omega = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$

donde los A_i son ajenos).

REGLA DE BAYES

(13) $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)}$$

(14) $$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$ con $P(B)$ como en (12)

INDEPENDENCIA

Independencia en dos eventos

(15) El evento B es independiente de A si $P(B|A)=P(B)$ o equivalentemente si
$P(AB)=P(B|A)\ P(A)=P(B)\ P(A)$

(16) EL evento A es independiente de B si $P(A|B)=P(A)$ o equivalentemente si
$P(AB)=P(A|B)\ P(B)=P(A)\ P(B)$

(17) A y B independientes $\Longleftrightarrow$ $P(AB)=P(A)\ P(B)$

(18) A y B independientes $\Longleftrightarrow$ A y B^C independientes

(19) A y B independientes $\Longleftrightarrow$ A^C y B independientes

(20) A y B independientes $\Longleftrightarrow$ A^C y B^C independientes

Independencia entre tres eventos

(21) Los eventos A, B y C son independientes si cumplen

i) por independientes por parejas:
$P(AB)=P(A)\ P(B)$; $P(AC)=P(A)\ P(C)$; $P(BC)=P(B)\ P(C)$

ii) la terna cumple: $P(ABC)=P(A)\ P(B)\ P(C)$

(22) A, B y C son independientes $\Longrightarrow$ A independiente de $A\cup B$.

(23) A, B y C son independientes $\Longrightarrow$ A independiente de $A\cap B$.

(24) A, B y C son independientes $\Longrightarrow$ A independiente de $A\,\Delta\,B$

Independencia en cuatro eventos

(25) Los eventos A, B, C y D son independientes si cumplen

i) Por parejas lo son.

ii) Por ternas cumplen: $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$;

$$P(ABD) = P(A)P(B)P(D); \quad P(BCD) = P(B)\ P(C)\ P(D);$$

$$P(ACD) = P(A)\ P(C)\ P(D)$$

iii) El cuarteto cumple $P(ABCD) = P(A)\ P(B)\ P(C)\ P(D)$.

PROBLEMAS

1. Considera una carretera de 100 km en donde las condiciones de la carpeta asfáltica, el volumen de tránsito y la peligrosidad de las curvas son uniformes (de manera que los accidentes pueden ocurrir con igual probabilidad en cualquier punto del recorrido). Define los eventos

   A: Un accidente ocurre entre los 0 y 30 kilómetros.
   B: Un accidente ocurre entre los 20 y 60 kilómetros.

   Si ha ocurrido un accidente en el intervalo (20,60) del recorrido, ¿cuál es la probabilidad del evento A?

   R: 1/4

2. Se lanza dos veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas tiradas sean águilas dado que la primer tirada fue águila?

   R: 1/2

3. Se tiran dos dados. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que al menos uno sea 6 dado que los dados muestran números distintos?

   R: 1/3

4. Prueba que $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$.
   ¿Qué relación hay entre $P(A|B)$ y $P(A|B^c)$?

5. Una urna contiene 6 bolas blancas y 9 negras. Si se seleccionan sin reemplazo cuatro bolas, ¿cuál es la probabilidad de que las primeras dos sean blancas y las dos últimas sean negras? Contesta la misma pregunta si la selección se hace con reemplazo.

   R: 6/91, 0.0576

6. Un pescador atrapó 10 peces de los cuales tres eran de menor

tamaño al permitido por la ley. Un guardia examina aleatoriamente dos de los peces. ¿Cuál es la probabilidad de que el guardia no seleccione peces de tamaño prohibido? Usa la regla de la cadena para tu respuesta y compárala con tu respuesta usando argumentos combinatorios.

R: 7/15

7. Un urna tiene 8 bolas rojas y 4 blancas. Se extraen dos bolas sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?. Usa la regla de la cadena y posteriormente utiliza sólo argumentos combinatorios.

8. Un dispositivo para inspeccionar las soldaduras realizadas en tuberías ha sido diseñado de manera que mande una señal cuando la soldadura es defectuosa. La probabilidad asignada para respuesta del dispositivo y el estado verdadero de la soldadura se muestra enseguida

Estado de la soldadura	Respuesta del dispositivo Envía señal	 No envía señal
Defectuosa	0.05	0.01
No defectuosa	0.02	0.92

Elije una tubería al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuosa?
c) Si el dispositivo de alarma envía una señal de defecto, ¿cuál es la probabilidad condicional de que la tubería no sea defectuosa?
d) Si el dispositivo no señala defecto, ¿cuál es la probabilidad condicional de que la soldadura esté de hecho defectuosa?

R: a) 0.06, b) 0.94 c) 2/7 d) 1/93

TIPS: Supón que Ω representa la población de tuberías sobre las que se realizaron soldaduras, D indica aquéllas tuberías con soldaduras defectuosas, A aquéllas tuberías en que el dispositivo envió una señal de alarma. Entonces las siguientes divisiones son válidas

$$\Omega = D + D^c \qquad y \qquad \Omega = A + A^c$$

$$\Omega = \Omega\,\Omega = DA + DA^c + D^cA + D^cA^c$$

$$D = DA + DA^c \qquad y \qquad A = AD + AD^c$$

Ω

D	DS 0.05	DS^c 0.01
D^c	D^cS 0.02	D^cS^c 0.92

9. Considera una urna con 12 bolas de las cuales 8 son blancas. Una muestra de tamaño cuatro se selecciona con reemplazo (sin reemplazo). ¿Cuál es la probabilidad condicional (en cada caso) de que la primera y tercera sean blancas, dado que la muestra seleccionada contiene exactamente tres bolas blancas.

   R: 1/2 (en ambos casos)

10. Un contratista está planeando comprar equipo, incluyendo bulldozers, para un proyecto en una región remota. Supón, que por experiencia, él se figura que hay un 50% de chance de que cada bulldozer dure al menos seis meses sin ninguna descompostura.

    i) Si él compra tres bulldozers, ¿cuál es la probabilidad de que haya sólo un bulldozer operando en seis meses?

    ii) Define los eventos:
    E: El primer bulldozer está operando después de seis meses.
    F: Dos bulldozers están operando después de seis meses.
    Encuentra $P(E|F)$ y $P(F|E)$.

    R: 3/8; 2/3; 1/2.

11. El hijo consentido de una familia con dos descendientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro descendiente sea mujer?

    R: 2/3

12. Una pareja tiene dos herederos. ¿Cuál es la probabilidad de ambos sean mujeres si el mayor es mujer?

R: 1/2

13. Considera tres urnas. La urna A contiene 2 bolas blancas y 4rojas, la urna B tiene contiene 8 blancas y 4 rojas y la urna C tiene una blanca y 3 rojas. Si se selecciona una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que la bola elegida de la urna A sea blanca dado que exactamente dos bolas blancas fueron seleccionadas?

R: 7/11

14. Una urna inicialmente contiene 5 bolas blancas y 7 negras. Cada vez que se selecciona una bola, se anota su color y se reemplaza a la urna junto con otras dos bolas del mismo color.
   a) Calcula la probabilidad de que las primeras dos bolas seleccionadas sean negras y las siguientes dos bolas sean blancas.
   b) Calcula la probabilidad de que en las primeras 4 bolas seleccionadas haya exactamente dos negras.

R: 35/768; 35/128

15. Se propuso el siguiente método para estimar el número de personas mayores de 50 años que residen en una ciudad de 100,000 habitantes. "Conforme recorra las calles lleve un registro del número de personas mayores de 50 años que va encontrando. Haga esta contabilidad durante unos pocos días y después multiplique el porcentaje observado (de personas mayores de 50 años) 100,000 para obtener la estimación deseada". Da tus comentarios sobre este método. ¿Está realmente estimando a la población adulta mayor de 50 años? o ¿qué está estimado?

   TIP: Has dos dicotomías de la población y después sobrepón (conjunta) ambas dicotomías para dividir aún más a la población. Indica por p la porción de este pueblo que son mayores de 50 años. Además indica por α_1 la proporción de tiempo que pasa en la calle una persona mayor de 50 años. ¿Qué cantidad está sugiriendo estimar el método propuesto? ¿Cuándo es aproximadamente igual a p?

16. Considera dos cajas, una teniendo una canica negra y una canica blanca, la otra teniendo dos negra y una blanca. Se selecciona una caja al azar, y se le extrae aleatoriamente una canica.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que la canica sea negra?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya seleccionado la primera caja, dado que la canica es blanca?

    R: 7/12; 3/5

17. La urna A contiene dos bolas blancas y una negra, mientras que la urna B contiene una blanca y 5 negras. Se selecciona una bola de la urna A y se coloca en la urna B. Después se saca una bola de la urna B y sucede que es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola transferida sea blanca?

    R: 4/5

18. Las tiendas A, B y C tienen 50, 75 y 100 empleados, respectivamente y el 50, 60 y 70 por ciento de éstos son mujeres. Las renuncias son igualmente probables entre todos los empleados, sin importar el sexo. Un empleado renuncia, y este es una mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que ella trabaje en la tienda C?

    R: 1/2

19. a) Un jugador tiene en su bolsillo una moneda insesgada (normal) y una moneda sesgada que tiene dos águilas. Él selecciona una moneda al azar y cuando tira el volado, resulta águila. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la moneda insesgada?

    b) Supón que él tira la misma moneda una segunda vez y de nuevo sale águila. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la moneda insesgada?

c) Supón que por tercera vez él tira la misma moneda y sale sol. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que sea la moneda insesgada?

R: 1/3; 1/5; 1

20. Una compañía de seguros piensa que las personas se pueden dividir en dos clases: aquellos propensos a accidentes y aquellos que no lo son, o sea, aquellos de alto riesgo y los de bajo riesgo. Las estadísticas de la compañía muestran que una persona de alto riesgo tendrá un accidente, en algún días comprendido en el período de un año con una probabilidad de 0.4, mientras que esta probabilidad disminuye a 0.2 para una persona de bajo riesgo. Supóngase que el 30% de la población es de alto riesgo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un nuevo asegurado tenga un accidente a un año de la compra de su póliza?

b) Supón que un nuevo asegurado tiene un accidente a un año de vigencia de su póliza. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de alto riesgo?

¿Cuál es la probabilidad de que alguna persona tenga un accidente en su segundo año, dado que no tuvo accidentes en su primer año?

R: 0.26; 6/13; 46/185

21. Supón que un campesino tiene en su granero una mezcla de semillas de maíz, que incluye el 60% del tipo I, 30% del tipo II y el 10% del tipo III. Las probabilidad de que una mazorca tenga más de 100 granos es 0.75, 0.50 y 0.25 para los respectivos tipos I, II y III. ¿Cuál es la probabilidad de que el campesino coseche una mazorca con más de 100 granos? ¿Cuál de que no la coseche?

R: 0.625; 0.375

22. Una de las tres posibles hipótesis H_1, H_2 y H_3 pueden explicar la ocurrencia de un accidente automovilístico. La probabilidad de un accidente, en caso de que H_1 sea correcta es igual a 0.75. Si H_2 es correcta, la probabilidad de un accidente es 0.8 y si H_3 es correcta, esta probabilidad es de 0.85. La hipótesis H_1 tiene la probabilidad de ocurrir de 0.4, la H_2 de 0.5 y H_3 ocurre con 0.1. Determina la hipótesis más probable cuando se observa un accidente.

R: H_2.

23. Una cierta enfermedad está presente en aproximadamente 1000 personas de una población dada. Un programa de pruebas va a ser llevado a cabo usando un mecanismo de detección, el cual con una probabilidad de 0.99 proporciona una lectura positiva cuando se aplica a una persona enferma y la probabilidad de que sea positiva, cuando se aplica a una persona sana es de 0.65. Se desea determinar la probabilidad de que una persona que tenga una lectura positiva realmente tenga la enfermedad. ¿Crees que debe ser alta?

R: 99/5094

24. Considera todas las familias con dos descendientes y supón que los hombres y las mujeres son igualmente probables de que formen parte de la pareja de descendientes.

i) Se selecciona una familia de esta colección, o sea, una familia con dos descendientes. Si ω es la familia elegida, esta familia puede esquematizarse por el par $\omega = (\alpha_1, \alpha_2)$ de sus descendientes α_1 y α_2. El orden indica el orden de su nacimiento. Así el espacio muestra de todas las familias es

$$\Omega = \{\omega = (\alpha_1, \alpha_2) : \omega \in \{(h,h), (h,m), (m,h), (m,m)\}\}$$

donde h es hombre y m es mujer. Este espacio muestra tiene 4 puntos, sin embargo, un modelo para una población más realista será considerar un espacio con 4N puntos, donde N es un número grande que representa el número de familias con dos descendientes en una población particular y cada uno de los 4 puntos aparecerá igual número de veces en esta colección de 4N puntos. Como la aritmética es la misma, sólo consideramos 4 puntos en vez de 4N. Si una familia se elige al azar de Ω y se encuentra que tiene un descendiente varón, ¿cuál es la probabilidad de que el otro descendiente sea varón?
Usa la siguiente notación:

$A = \{\omega\text{: la familia } \omega \text{ tiene un varón}\}$

$B = \{\omega\text{: la famlia } \omega \text{ tiene dos varones}\}$

para dar tu respuesta.

ii) Si un descendiente se elige al azar de esta población de familias con dos descendientes y se encuentra que es varón, ¿cuál es la probabilidad de que el otro descendiente en su propia familia también sea varón? Para contestar sigue el siguiente razonamiento

¿A quién se está muestreando (seleccionando)? ¿A una familia o a un descendiente? En este caso a un descendiente y si ω_* significa el descendiente de una familia con dos herederos o equivalentemente ω_* es un descendiente con hermano(a). Así, es espacio muestral es

$$\Omega = \{\omega_*\text{: } \omega_* \text{ es un descendiente con un hermano(a)}\}$$

$$\Omega = \{m_m,\ m_h,\ h_m,\ h_h\}$$

donde m_m significa con una hermana, h_m es un hombre con una hermana, etc. Llama

$A_* = \{\omega_*\text{: } \omega_* \text{es hombre}\}$

$B_* = \{\omega_*\text{: } \omega_* \text{ tiene un hermano}\}$

R: *i)* $P(B|A) = 1/3$

ii) $P(B_*|A_*) = 1/2$

25. Una compañía tiene dos fábricas que producen los mismos artículos que se llevan a una bodega. La fábrica 1 produce 1000 artículos, de los cuales 100 son defectuosos. La fábrica 2 produce 4000 artículos, de los cuales 400 son defectuosos. Se selecciona al azar un artículo del almacén general de la compañía y se encuentra que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que venga de la fábrica 1?

R: 1/3

26. Cuatro carreteras pueden tomarse desde la cárcel de un pueblo. Un prisionero escapa y elige al azar una ruta. Si la carretera I se elige, la probabilidad de escapar es 1/8; si se elige la carretera II la probabilidad de escapar es 1/6; si se elige la carretera III y IV, las probabilidades de escapar son iguales a 1/4 y 9/10, respectivamente.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que el prisionero tenga éxito en su escape?

ii) Si el prisionero logró escapar, ¿cuál es la probabilidad de que escapara por la ruta IV? ¿y por la ruta I?

R: 173/480; 108/173; 15/173

27 En 60 refacciones automotrices transportadas en un camión cargado en Veracruz, 45 tienen por destino a Puebla y 15 a Tampico. Si dos de las refacciones son descargadas en Jalapa por error y la "selección" es aleatoria, ¿cuáles son las probabilidades de que

a) ambas refacciones tengan por destino a Puebla?
b) ambas refacciones debieran llegar a Tampico?
c) una tenía por destino Puebla y la otra Tampico?

R: a) 33/69, b) 7/118, c)45/118

28. Una tienda de departamentos cobra una vez al mes a los clientes que gozan de crédito ilimitado y ha descubierto que, si un cliente paga puntualmente un mes, la probabilidad es de 0.90 de que también lo haga el próximo mes; sin embargo, si no paga puntualmente un mes, la probabilidad de que tampoco lo haga el siguiente mes es

de apenas 0.50. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que ha pagado puntualmente un mes no pague puntualmente en los próximos tres meses?

R: 0.025

29. En 5 de los 12 camiones de reparto de una compañía, el escape no reune los requisitos de ley y 4 de los 12 camiones son aleatoriamente elegidos para revisión. ¿Cuál es la probabilidad de que en ninguno de ellos el escape reuna los requisitos de ley?

R: 1/99

30. Dos empresas, V y W, están examinando la conveniencia de participar en la obra de construcción de una carretera, cuya conceción dependerá del monto de los ofrecimientos. La empresa V presenta una oferta, y la probabilidad es de 3/4 de que obtenga la obra con tal que la empresa W no presente su oferta. Las posibilidades están 3 a 1 a favor de que W sí la presente; y si lo hace, la probabilidad de que V obtenga la obra es solamente 1/3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que V obtenga la obra?
b) Si V obtiene la obra, ¿cuál es la probabilidad de que W no haya presentado su proposición?

R: a) 7/16; b) 3/7

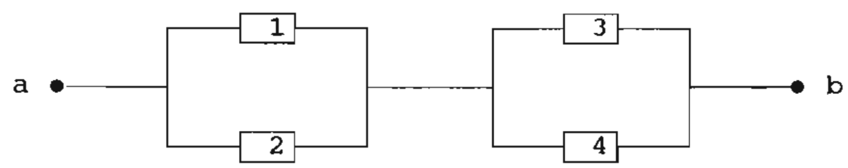
31. En junio de 1987, una avioneta tripulada por un joven alemán aterrizó en la Plaza Roja de Moscú sin ser detectada por el gobierno soviético.

a) Supón que los radares soviéticos disponibles tienen una probabilidad de 0.7 de detectarlos y que se colocarán de manera que funcionen independientemente uno de otro. Se desea conocer cuántos radares colocar, con el objeto de detectar un avión con probabilidad de 0.99

TIP: Considera el complemento, ¿cuántos radares fallaran en detectarlo?

b) Los japoneses ofrecen un radar que puede detectar objetos aéreos con una probabilidad de 0.99. ¿Cuántos radares japoneses deberá colocar Rusia para tener la misma confiabilidad de 0.99?

32. Los relevadores de una sección de un circuito eléctrico operan independientemente y cada uno se cierra con probabilidad de 0.9 cuando un switch es accionadc. Los siguiente dos diseños, cada uno involucrando 4 relevadores son presentados para una sección de un nuevo circuito.



PROBABILIDAD CONDICIONAL

Se terminó de imprimir en el mes de mayo del año 2001 en los talleres de la Sección de Impresión y Reproducción de la Universidad Autónoma Metropolitana, *Unidad Azcapotzalco*

La edición estuvo a cargo de la Sección de Producción y Distribución Editoriales

Se imprimieron 50 ejemplares más sobrantes para reposición.

0092101 35342

12.00 - $ 12.00

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Sistemas

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales